ISSN: 1665-5826

Educación Matemática

México • vol. 27 • núm. 3 • diciembre de 2015

Comité editorial

EDUCACIÓN MATEMÁTICA es una publicación internacional arbitrada, que ofrece un foro interdisciplinario para la presentación y discusión de ideas, conceptos y modelos que puedan ejercer una influencia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revista publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. EDUCACIÓN MATEMÁTICA aparece tres veces al año y es indexada en ZDM (Zentralbatt für Didaktik der Mathematik), MathDi (MathEducDatabase), Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, Latindex, REDALYC (Red de revistas científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal), Scientific Electronic Library Online (SCIELO) y Clase (Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades). Las colaboraciones son recibidas en: revedumat@yahoo.com.mx.

Educación Matemática

Sociedad Mexicana
de Investigación
y Divulgación
de la Educación
Matemática, A.C.

Educación Matemática *vol. 27 • núm. 3 • diciembre de 2015*

© Educación Matemática, vol. 27, núm. 3, diciembre de 2015, es una publicación de la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A.C., con domicilio en Guty Cárdenas 121-B, Col. Guadalupe Inn, 01020, México D.F.

Certificado de Licitud de Título número 12499 y Certificado de Licitud de Contenido número 10070, expedidos por la Comisión Calificadora de Publicaciones y Revistas Ilustradas de la Secretaría de Gobernación.

Registro número 3012 de la Cámara Editorial de la Industria Editorial Mexicana.

Editor responsable: Alicia Ávila Storer. Reserva de derechos al uso exclusivo: 04-2002-111517075100-102 expedido por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor. ISSN 1665-5826

Corrección de estilo y diagramación: Ofelia Arruti y Moisés Arroyo

Contenido

Editorial

Los artículos que cierran el año 2015 de nuestra revista, no obstante tratan diversos temas y tienen diferentes enfoques y metodologías, comparten un rasgo común: expresan interés y preocupaciones por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y por la mejora de estos procesos. Esta orientación, observada en los diversos escritos, hace evidente el perfil que desde sus orígenes ha mantenido nuestra revista: la vinculación con los procesos de enseñar y aprender matemáticas, vistos desde sus distintas dimensiones y actores. Es decir que permanentemente han sido tema de análisis los alumnos, los docentes, los procesos de comunicación del saber, la búsqueda e instrumentación de innovaciones educativas, el diseño de situaciones didácticas, las instituciones donde los procesos educativos tienen lugar.

Todas las contribuciones sin duda aportarán conocimientos e ideas a nuestros lectores, tanto si son investigadores como si son profesores que lidian cotidianamente para que sus pupilos aprendan matemáticas. Dejando establecido el valor de los escritos y su potencial utilidad en distintas vías, queremos centrar nuestros comentarios en un tema poco trabajado entre los investigadores: la historia de la educación matemática. Este interés se actualiza a partir del artículo de Bruno D'Amore e Isabel Fandiño: "Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática".

El artículo refiere a la historia de las ideas educativas y los recursos que en distintos periodos fueron introducidos a los sistemas educativos de muchos países con el fin de innovar –y con ello supuestamente mejorar– la enseñanza de las matemáticas en la educación básica.

¿Para qué abordar la historia de las ideas y las propuestas educativas en matemáticas?, ¿cuál es el sentido que podemos darle a "una mirada en retrospectiva" a la enseñanza que distintas reformas promovieron en el mundo? Los investigadores del campo de la educación matemática no han puesto en duda el valor de estudiar la historia de las matemáticas, pues "El análisis crítico del desarrollo histórico de los conceptos matemáticos ha sido visto como un auxiliar para la comprensión y explicación de los mecanismos de apropiación y construcción del conocimiento y la creación de propuestas didácticas".

Menos valor parece haberse concedido a la historia de la enseñanza de las matemáticas (al respecto puede considerarse los pocos artículos que han aparecido en educación matemática sobre este tema). Para entender el valor de la historia educativa en matemáticas, cito las palabras de Carlos Pereyra, connotado filósofo e historiador mexicano, anotadas en el libro *¿Historia para qué?:* "La función del historiador no es amar el pasado, ni emanciparse de él, sino dominarlo y comprenderlo, como clave para la comprensión del presente [y la acción en este presente]" (Pereyra, C. y otros, 1980, *¿Historia para qué?,* México, Siglo XXI, p. 16).

En tal sentido, creemos, tiene un gran valor mirar el pasado de la enseñanza de las matemáticas. En concreto, el artículo de D'Amore y Fandiño es útil para conocer (o recordar) el pasado reciente de la educación matemática, de los esfuerzos realizados por mejorar el aprendizaje; pero aún más allá: para entender cómo estas intenciones con el paso del tiempo mostraron sus bondades y sus limitaciones. Al grado que los autores hablan, nos parece que acertadamente, de "ilusiones".

La perspectiva desde la que D'Amore y Fandiño hacen la revisión de las diversas propuestas de innovación introducidas en muchas partes del mundo con menos éxito del previsto, nos trae a la mente la postura de Guy Brousseau en torno a la *ideología de la innovación*, consignada en esta misma revista y que para no correr el riesgo de traicionar, citamos a continuación:

> Una innovación interesa a cierto número de profesores porque les interroga acerca de sus prácticas y les ayuda a luchar contra la obsolescencia. Interesa a todos aquellos que giran en torno de la enseñanza: formadores, editores, responsables diversos, debido a que nutre su discurso y justifica su intervención. Interesa a todos aquellos que quieren dar a entender, por algún motivo, que la enseñanza está inadaptada. Sin embargo, al hacer de lo novedoso el criterio esencial para valorar las acciones propuestas, se destruyen las posibilidades de éxito de las mismas, y se muestra al mismo tiempo que no es al mejoramiento de la enseñanza a lo que se aspira. Efectivamente, lo propio de una innovación es descalificar una práctica antigua para remplazarla por otra, y no para corregirla [...] Pero una innovación ahuyenta a otra, critica a la precedente, pero no la regula [...] Las modas pasan o regresan sin verdaderos progresos. La ideología de la innovación aniquila a la innovación (G. Brousseau, *Educación Matemática*, vol. 12, núm. 1, pp. 31-32).

Este brillante párrafo, creemos, nos guía ineludiblemente a la reflexión en torno a nuestro propio quehacer como investigadores y a ponderarlo a la luz de pasados intentos de innovación.

El Comité Editorial

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Propuestas metodológicas que constituyeron ilusiones en el proceso de enseñanza de la matemática

Bruno D'Amore y Martha Isabel Fandiño Pinilla

Resumen: Se presentan y se discuten críticamente metodologías e instrumentos que fueron propuestos con la ilusión de comprender positivamente el complejo proceso de aprendizaje de la matemática. Se hace un análisis histórico y didáctico de dichas metodologías e instrumentos. Se muestra la inutilidad de unos y, en algunos casos, la peligrosidad de otros.

Palabras clave: instrumentos para la enseñanza de la matemática, evolución histórica de la educación matemática, formación de docentes en matemática.

Methodological proposals that constituted illusions in the teaching of mathematics process

Abstract: In this paper we present and critically discuss methodologies and tools that have been proposed in illusory way as positively decisive in the complex process of learning mathematics. We present historical and didactic analysis to show the futility in some cases and in others the harmfulness.

Keywords: tools for the teaching of mathematics, historical evolution of mathematics education, teacher training in mathematics.

0. PREMISA

La disciplina "Didáctica de la Matemática" tiene una historia propia de aproximadamente 40 años, decretada por estudios específicos al respecto. Uno de los primeros textos en dicha dirección fue el de Artigue, Gras, Laborde y Tavignot

Fecha de recepción: 23 de julio de 2015; fecha de aceptación: 1 de octubre de 2015.

(1994). En dicho trabajo se habla de "20 años de didáctica de la matemática en Francia", lo cual a la fecha implica un poco más de 40 años.

En un intento por definir la evolución histórica de dicha disciplina, se puede tomar como base la evolución de los intereses de los investigadores; así, propusimos a finales del siglo XX el siguiente camino (D'Amore, 1999):

- *Didáctica A* ("A" de "ars docendi", traducción del latín de la palabra "didáctica"): la didáctica de los orígenes, en la cual los estudiosos centraban toda su actividad en las prácticas relacionadas con la enseñanza de la matemática (qué enseñar, cuándo y cómo: currículos, proyectos educativos, instrumentos para la enseñanza...). Temporalmente, esta fase se ubica entre los años 1950 y mediados de los años 1980, aunque continúa todavía hoy, puesto que en algunos centros de estudios de diversos países se persiguen sólo objetivos de este tipo.
- *Didáctica B* ("B" en cuanto sucesiva de "A") o epistemología del aprendizaje de la matemática: es aquella que considera el aprendizaje de la matemática como un hecho específico y tema principal de la investigación. Pensamos en 1986 como fecha aproximada de la transición de la investigación en didáctica A a la investigación en didáctica B, basándonos en el artículo de Guy Brousseau publicado en ese año (Brousseau, 1986). Este artículo es el último de una sucesión de trabajos que tenían como objetivo desmantelar una manera no científica de considerar la investigación en didáctica de la matemática para pasar a una fase nueva. En este artículo, por ejemplo, se funda la teoría de las situaciones didácticas, esencial para el nacimiento de la teoría moderna de la Didáctica de la Matemática (Brousseau, 2015).
- *Didáctica C* ("C" en cuanto sucesiva a "B"): es aquella fase en la cual los investigadores cambian la tipología del sujeto de estudio, pasando del estudiante al docente y a sus convicciones, decisivas para la creación y el análisis de las situaciones de aula (D'Amore, 2006). Podemos considerar los primeros años del siglo XXI como el inicio de esta aproximación (Leder, Pehkonen y Törner, 2002).

Casi siempre centradas en la fase A, se desarrollaron ideas, se dieron sugerencias, se lanzaron propuestas... para un "mejoramiento" de la praxis de enseñanza de la matemática en los diferentes niveles escolares. Puesto que la fase A se caracteriza por la falta de rigor en la investigación, no existen sustentos de carácter científico de las metodologías propuestas. El hecho es que, para poder validar la significatividad de un instrumento de enseñanza (tipología A), es necesario verificar empíricamente el aprendizaje (tipología B). Si las propuestas se quedan en A, no puede existir una confirmación significativa sobre bases científicas ni de los instrumentos ni del aprendizaje.

Además, es bien conocido que el docente se ilusiona por lo general cuando le ofrecen metodologías cuyo creador declara que tienen un efecto positivo garantizado en el aprendizaje, lo hace en una búsqueda de algo que podríamos llamar *panacea* (Kimmel y Deek, 1996). En este artículo se usa precisamente el término "panacea" en el mismo sentido usado por Kimmel y Deek (véase también Powers y Powers, 1999).

El objetivo del presente trabajo es discutir críticamente algunas de estas propuestas ilusorias que tuvieron éxito y gran difusión durante un cierto periodo con la esperanza de que el docente aprendiera a hacer uso de los criterios de análisis de los instrumentos concretos que a menudo se sugieren para su acción de aula.

Dividiremos el artículo en dos partes: algunas ideas metodológicas ilusorias y algunos instrumentos concretos ilusorios. El límite entre metodologías e instrumentos es sutil, ya que muchos creadores de instrumentos presentan metodologías mediante estos. Nosotros decidimos hacer una diferencia entre las ideas abstractas y los instrumentos concretos: en las primeras, se sugieren metodologías de enseñanza, en los segundos, se presentan verdaderos objetos como instrumentos para la enseñanza, pero siempre para colocarlos en las manos de los aprendices. Veremos más adelante una lista y un análisis de los más conocidos de estos instrumentos.

Como punto base de este texto, queremos declarar explícitamente lo siguiente: las elecciones del docente, aun siendo personales, no lo son estrictamente; sus elecciones están fuertemente influenciadas por el contexto ideológico y pedagógico de la época. Por lo cual, no se puede, en ningún momento, "culpabilizar" al docente por sus elecciones, las cuales, en ocasiones, se revelan erróneas a los ojos de los investigadores; lo que se puede hacer es identificarlas, estudiarlas y analizarlas.

1. ALGUNAS IDEAS METODOLÓGICAS ILUSORIAS

Enumeramos, describimos y comentamos algunas propuestas del pasado que condicionaron el complejo proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática sobre bases ilusorias.

1.1 Enseñar la lógica de los enunciados en todos los niveles escolares

En los años 1990-1999 se pensó que, enseñando la lógica de los enunciados a todos los estudiantes de cualquier edad, estos automáticamente aprehenderían las bases mismas de la matemática, aprenderían a "razonar", a hacer uso correcto de deducciones y a demostrar.

Esta ilusión transversal se sustentaba en una analogía entre elementos de la lógica de los enunciados y de la lengua madre: conectivos lógicos como conectores del idioma natural, cuantificadores lógicos como cuantificadores lingüísticos, enunciados lógicos como frases del lenguaje, deducciones como argumentaciones. Después de varios años de experimentaciones en dicho sentido, se evidenció que aquella analogía no era tan inmediata como se pensó (D'Amore, 1991). Aún más allá, se vio que son pocos los estudiantes que, en la elaboración de una demostración, recurren a los elementos aprendidos de la lógica aristotélica. Por el contrario, es generalizado el uso espontáneo e inconsciente de la lógica india (*nyaya*) mucho más anclada a la realidad (una especie de silogismo de cinco términos, uno de los cuales se llama, no casualmente, "ejemplo") (D'Amore, 2005).

En corto tiempo se mostró que enseñar la lógica en todos los niveles escolares era un error metodológico que contribuía a alejar a los estudiantes de la matemática.

Durante varios años, se hizo preceder la enseñanza de la lógica de los enunciados a la enseñanza de la matemática tradicional, casi como una necesidad preliminar. Por lo general, los docentes se centraban en solicitar la repetición mnemónica por parte de los estudiantes de tablas semánticas de verdad de los conectivos.

Nosotros no estamos en contra de la enseñanza de la lógica, siempre y cuando se haga de manera adecuada y oportuna. La lógica formal es parte de la matemática tanto como la aritmética, la geometría o la probabilidad, pero es necesario estar convencidos de que no es la enseñanza de la lógica la que resuelve el problema metadidáctico del aprendizaje de la matemática.

1.2. La teoría "ingenua" de conjuntos

La gran mayoría de las argumentaciones de la matemática son de tipo colectivo, es decir, no tienen que ver con objetos matemáticos sino con clases de estos objetos. Por ejemplo:

- todos los cuadrados son (también) rombos; lo que permite decir que todo cuadrado es un rombo;
- el conjunto de los divisores de 3 es un subconjunto de los divisores de 6.

Dichas argumentaciones, como nos lo enseñó Leonhard Euler (1707-1783), se pueden representar con gráficos oportunos que ilustran muy bien lo que después se llamó "teoría elemental de conjuntos" (D'Amore y Matteuzzi, 1975; Bagni, 1996; Bagni y D'Amore, 2007; D'Amore y Fandiño Pinilla, 2007). Además, como nos lo mostraron los bourbakistas, la matemática puede reducirse al estudio de estructuras y, por tanto, usar la teoría de conjuntos como lenguaje formal para toda la disciplina. Este camino lo había indicado Felix Klein con sus definiciones estructurales de geometría que definen las varias geometrías como grupos algebraicos particulares (D'Amore y Matteuzzi, 1975).

En los años 1960-1970, se inició desde Estados Unidos una reforma radical del currículo de matemática de todos los niveles escolares basada en una *teoría ingenua de conjuntos* como consecuencia de la autocrítica a su sistema educativo derivada del lanzamiento del cohete soviético llamado Sputnik en 1957. "Teoría ingenua de conjuntos" fue una manera de indicar una teoría de conjuntos no demasiado formal y ciertamente no axiomática. La matemática que se propuso teniendo como base esta teoría se llamó: *New Math*, *Nueva Matemática, Matemática moderna* (Phillips, 2014).

Según varios autores, uno de los artífices teóricos de esta propuesta fue André Lichnerowicz (1915-1998) que trabajaba en Francia en esa época. En 1967 el gobierno francés creó la "Comisión Lichnerowicz", formada por un grupo de eminentes docentes de matemática. La Comisión recomendó explícitamente un currículo que asumiera como base la teoría de conjuntos (adaptando esta teoría a cada uno de los niveles escolares) a fin de poner tempranamente a los niños en contacto con las estructuras matemáticas (Mashaal, 2006).

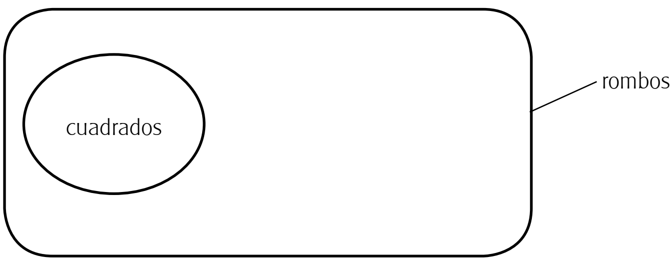
La propuesta puede explicarse así: hay que privilegiar en las escuelas, incluso a partir del preescolar, una teoría no formal de conjuntos, y tratamos dicha teoría y sólo esta hasta que sea aprehendida y quede enraizada en los conocimientos de los estudiantes de forma tal que les permita insertar en este contexto lógico-lingüístico-representativo cualquier aspecto de la matemática.

Como consecuencia de esta perspectiva, desaparecía la geometría euclidiana tradicional y se posponía la aritmética. Se asistía al siguiente fenómeno: los estudiantes de primaria aprendían el significado (al menos con ejemplos particulares) de conjunto vacío, conjunto universo, intersección, subconjunto, pertenencia, etcétera, pero no sabían calcular el resultado de una adición o de una sustracción. La reacción crítica de los matemáticos fue violenta, en particular causó gran sensación el análisis crítico de Morris Kline (1973).

Las investigaciones que se hicieron en varios países, incluso en Italia (D'Amore, 1975), mostraron que se trataba de un sueño lejano de la realidad del aprendizaje y fue así como esta teoría de conjuntos se abandonó rápidamente.

Esta vía a la matemática se reveló del todo innatural, forzada, sin resultados significativos, ya que la capacidad de resolver problemas incluso banales era imposible de alcanzar siguiendo este camino. En particular, se revelaron decisivos los análisis críticos, profundos y detallados de Guy Brousseau (1965, 1972, 1980a, 1980b, 1982, 1984, 1986; Brousseau y Perez, 1981).

Sin embargo, esto no significa que no sea posible diseñar un gráfico en el cual se hable de ciertos conjuntos de objetos matemáticos, como el siguiente:



Todos saben interpretar este gráfico de manera intuitiva: todo cuadrado es un rombo, pero existen rombos que no son cuadrados. Lo que estamos diciendo es que no es necesario desarrollar una teoría específica para diseñar un gráfico con un significado banal e intuitivo como el del ejemplo, ya que, si lo hacemos así, nos arriesgamos a confundir el instrumento del cual nos valemos para la enseñanza con el objeto de estudio, confusión que en didáctica de la matemática se llama *deslizamiento metadidáctico* (Brousseau y D'Amore, 2008).

1.3 Los diagramas de flujo

Los diagramas de flujo nacieron en el ámbito de las representaciones gráficas para proporcionar modelos visibles de algoritmos, procedimientos ordenados de tipos diversos que seguían un orden determinado y secuencias de operaciones. En inglés se llaman *flow charts* y tuvieron un gran desarrollo en informática. Se crearon formas convencionales para indicar la tipología de los objetos en cuestión, por ejemplo rectángulos, rombos, hexágonos, paralelogramos, etcétera. Entre estas formas se colocan flechas para indicar el orden que se debe seguir en la secuencia de las operaciones o de las instrucciones. Se trata, por tanto, de un caso específico de los llamados diagramas de bloques que sirven para describir procesos. Una exhaustiva reseña histórica de los diagramas de flujo y de sus usos se encuentra en Yourdon y Constantine (1979).

El éxito de este instrumento radicó en el intento de los años 1970-1975 para introducir en la enseñanza escolar las bases de la informática. Tal vez una de las primeras contribuciones divulgativas de esta sugerencia es la Guía monográfica número 4 del proyecto *Nuffield para la Matemática* (Fundación Nuffield), con base editorial en Edimburgo, Londres y Nueva York. Esta Guía (Nuffield Project, 1972), exclusiva para los docentes, fue traducida en varios países en un lapso de tiempo muy corto.

En este texto 4 del proyecto *Nuffield*, las páginas 6-12 se dedican a presentar una introducción a los diagramas de flujo como esquemas para estructurar una sucesión de actividades, por tanto propuestos como acceso a la descripción de los algoritmos y después a la programación de las computadoras como objeto de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

Hemos analizado numerosas publicaciones de dicho periodo, a partir de la primera mitad de la década de 1980 hasta mediados de los años 1990, y los diagramas de flujo siempre se proponen con los objetivos con que fueron creados originalmente: la idea de enseñar a los estudiantes a programar, al inicio principalmente en lenguaje Basic, que lentamente se abandonó, y hoy se propone en raras ocasiones.

No se sabe en donde surgió la idea de usar este instrumento de carácter netamente descriptivo, convirtiéndolo en un instrumento estratégico-resolutivo, en clave didáctica. Se puede pensar que la hipótesis didáctica se pueda describir como sigue: utilizamos los diagramas de flujo para representar el proceso a seguir en la resolución de problemas escolares sin importar el nivel escolar, iniciando desde la escuela primaria y haciendo coincidir el razonamiento resolutivo con la representación del proceso. Esta manera de pensar se apoyaba en que el uso de los diagramas de flujo ayudaría a los estudiantes a reflexionar sobre el procedimiento y, por tanto, aumentaría su capacidad para resolver problemas. El texto que más a menudo se cita por casi todos los defensores de esta desviación del significado real de los diagramas de flujo es el famoso libro de Seymour Papert (1980), traducido a varios idiomas.

Pero existen dos puntos críticos sobre los cuales reflexionar.

- *Punto 1*

En la resolución de un problema, sin importar qué tipo de problema sea, existe un momento creativo. Por ejemplo, en el clásico estudio de Glaeser (1975) existen cinco fases que constituyen el proceso heurístico en la sucesión de las acciones de resolución de los problemas:

- la preparación;
- la incubación;
- el "bricolaje";
- el eureka;
- la verificación y la redacción.

El eureka es el momento central, irrenunciable y creativo. Más aún, es precisamente este hecho el que diferencia la resolución de un problema respecto a la ejecución de una operación o de un ejercicio, actividades que se considera requieren de una menor exigencia cognitiva. Por tanto, ninguna representación gráfica de un problema, por detallada que sea, facilita la capacidad de afrontar con éxito el momento creativo (estratégico, dicen algunos) que se pone en juego en la resolución de un problema (D'Amore, 1995).

- *Punto 2*

La dificultad de describir la resolución mediante el diagrama el flujo relativo a un determinado problema es siempre ampliamente superior a la dificultad de resolver dicho problema escolar, sin importar la edad o el nivel. Por tanto, a la evidente y bien conocida dificultad de los estudiantes de resolver los problemas con la solicitud de recurrir a los diagramas de flujo no se le dio una respuesta de ayuda en términos reales, sino que se le agregó una dificultad más, por lo general insuperable. Fueron muchos los alumnos de primaria o de secundaria que declaraban tener dificultad para diseñar el diagrama de flujo, incluso cuando habían podido resolver el problema sin recurrir a este diagrama. Hay evidencia de niños que aseguran saber resolver el problema, pero no saber diseñar el diagrama de flujo, y algunos afirman que deben diseñarlo porque es lo que el docente pretende en el aula (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sbaragli, 2008; D'Amore y Marazzani, 2011).

Después de mostrar estos puntos críticos en gran parte del mundo, esta ilusión fue ampliamente criticada y este instrumento fue totalmente abandonado (D'Amore, 2014). Esto no significa que no se puedan usar secuencias bien estructuradas para indicar el orden de las operaciones que se deben realizar, más aún, en ocasiones estas secuencias son considerablemente útiles. Lo explicamos con un ejemplo.

El niño de primaria tiende a utilizar el signo igual dándole un significado procedimental y no relacional, siendo esta última interpretación la esperada en la enseñanza (Camici y otros, 2002). Esto significa que algunos niños resolverán el problema: *"El propietario de una papelería compra 12 cajas de bolígrafos. Cada caja contiene 6 bolígrafos y cada bolígrafo cuesta 2 euros. ¿Cuánto debe pagar el propietario por las cajas de bolígrafos?"*, de la siguiente manera:

$$12 \times 6 = 72 \times 2 = 144$$

y no así:

$$12 \times 6 = 72$$
$$72 \times 2 = 144$$

porque consideran que el signo = significa "da" ("resulta"), es decir, que el signo = indica un procedimiento (Boero, 1986; D'Amore, 1993a).

Las dos expresiones son similares desde el punto de vista semiótico, pero no desde el punto de vista semántico. Las dos funciones, objetivación y comunicación, son fundamentalmente diferentes y, por consiguiente, llevan a juicios muy diferentes en lo relacionado con la evaluación de la producción del alumno (Duval, 1995a, b).

Varios investigadores en todo el mundo sugieren proponer a los niños reemplazar el signo = por una flecha para ir apropiándose poco a poco del significado de igualdad (Boero, 1986; D'Amore, 2014). Por consiguiente, es oportuno hacer que los niños sean conscientes del hecho de que se trata de realizar dos operaciones y que la segunda es consecuencia de la primera en el proceso de resolución de dicho problema.

Desde hace algunos años, se abandonó del todo la propuesta de hacer que un esquema del texto preceda al proceso de resolución de un problema y después establecer el procedimiento por seguir en forma de diagrama de flujo; pero esta idea fue una ilusión que permaneció en el mundo de la escuela por más de un decenio.

1.4 "Recetas" metodológicas para resolver problemas

Puesto que el aprendizaje estratégico (Fandiño Pinilla, 2010) parece ser uno de los aprendizajes más complejos en casi todos los niveles escolares, se han dado, en el curso de los años, sugerencias de tipo metodológico que el docente utiliza para incentivar a los estudiantes que están resolviendo un problema. Normalmente, se trata de estímulos concretos e indicadores de direcciones estratégicas para la resolución del problema. Un análisis atento evidencia la inutilidad de estas sugerencias y, en ocasiones, su efecto contrario.

Este tipo de indicaciones se pueden aglutinar en un grupo que llamaremos "recetas metodológicas" (modelos normativos). (La definición de este tipo de modelos, sobre su presencia en las aulas y sobre su futilidad, se encuentra ya en Kleinmuntz, 1976; una reseña histórico-crítica se encuentra en D'Amore, 1999.)

Es interesante el hecho de que, al pedir al estudiante describir sus procesos personales de resolución, él utiliza precisamente las frases del docente como si fueran un guion (Kleinmuntz, 1976; Resnick y Ford, 1981); hoy sabemos que este tipo de actitud se debe, sin duda alguna, al fenómeno del contrato didáctico (Brousseau, 1986; para un análisis más actualizado, véase D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy, 2010).

Hemos identificado algunos de estos estímulos, considerados por los docentes como guía metodológica útil o necesaria para resolver un problema de matemática. Para cada uno de estos estímulos, proponemos un comentario derivado de las reflexiones críticas de los propios docentes. (Sobre la identificación de estas frases y sobre las autocríticas de los docentes en servicio, véase D'Amore, 1993a y 2014).

- "Debes prestar mucha atención"; el poner atención a lo que se está haciendo no es algo que pueda ordenarse desde el exterior ni es condición suficiente para alcanzar el aprendizaje conceptual ni para la resolución de un problema.

- "Lee bien el texto"; el texto en el cual se propone un problema no siempre aparece necesariamente como un texto escrito, el problema puede presentarse con un diseño o de manera oral o con un gráfico o de cualquier otra forma; y además, el "leer bien" no tiene un significado preciso; el estudiante podría "leer bien" un texto, palabra por palabra, y no entender el sentido de lo leído.
- "Lee bien la pregunta"; además de la crítica precedente, no siempre la pregunta del problema es explícita; en ocasiones ni siquiera está presente.
- "Encierra con un círculo los datos numéricos"; no siempre los datos corresponden a números y no siempre estos datos numéricos son útiles en la resolución de un problema.
- "Subraya la pregunta"; la pregunta no siempre requiere ser evidenciada; además, hay problemas en los que no es posible singularizar la pregunta, lo que lleva inevitablemente al fracaso.
- "Busca la palabra clave que te ayudará a entender"; la supuesta llamada "palabra clave" puede ser un obstáculo semántico en la búsqueda de la operación resolutiva. Estudios de didáctica de la década de 1980-1990 evidenciaron cómo lleva al fracaso esta sugerencia.
- "Decide cuál es la operación (aritmética) para resolver"; no siempre existe una supuesta "operación para resolver" para caracterizar la resolución de un problema.
- "Analiza si el número que estás buscando debe aumentar (en ese caso se trata de una adición o de una multiplicación) o si debe disminuir (en ese caso debes usar...)"; las operaciones "que aumentan" o "que disminuyen" son algunas de las sugerencias más erróneas que el docente puede proporcionar a sus estudiantes; como ejemplo, veamos una multiplicación que no aumenta: 12×0.5 (Fischbein, 1985a, 1985b). (Sobre todo esto véase también: Brousseau y D'Amore, 2008).

Para concluir, diremos que no existen ni caminos ni estrategias, ni algoritmos ni indicaciones verbales oportunas para enseñar a resolver problemas en ningún nivel escolar; la fase creativa "eureka" (véase 1.3) no puede identificarse con un algoritmo. No es por casualidad que hoy se hace una distinción entre "ejercicio" (cuya praxis ejecutiva se desarrolla en la zona efectiva de Vygotsky) y "problema" (cuya praxis resolutiva se desarrolla en la zona de desarrollo próximo de Vygotsky) (Fandiño Pinilla, 2010).

1.5 El laboratorio de matemática

En los años 1960-1970 se desarrolló la idea de no limitar la enseñanza y el aprendizaje únicamente al aula y a la teoría, a las lecciones "frontales" como se decía entonces, sino de extenderlos al "hacer" (De Bartolomeis, 1978; para un resumen histórico de la evolución de las metodologías de enseñanza, véase Frabboni, 2004).

Se trataba de idear actividades manuales en las que el concepto matemático que se quiere alcanzar debía modelarse concretamente y se invitaba al estudiante, solo o en grupo, a entrar en un verdadero taller dotado de instrumentos de trabajo manual (sencillos), a fin de realizar materiales que respondían a ciertas tareas y a ciertas características que eran ilustraciones concretas de ideas matemáticas.

Sobre las modalidades concretas y teóricas de interpretación de los laboratorios, se hicieron grandes debates; nosotros fuimos y somos partidarios de una interpretación "fuerte", es decir:

- un laboratorio debe ser pensado como un verdadero taller, con actividades concretas específicas;
- con actores específicos (no sólo alumnos), por ejemplo, un experto de laboratorio; hay que evitar la identificación del experto de laboratorio con un docente, para no crear en el ambiente del laboratorio las normas negativas del contrato didáctico;
- un local específico (no el aula en un momento que se extrae de la rutina de clase).

Todo esto, con ejemplos concretos, teorizaciones específicas y guías prácticas, se encuentra, por ejemplo, en Caldelli y D'Amore (1986) y en D'Amore (1988a, b, c, 1989a, b, 1990-1991).

Se podría poner en la base de esta metodología didáctica la siguiente reflexión de esperanza: si el estudiante hace, construye la matemática de la realidad y en la realidad, dicha matemática conllevará un aprendizaje eficaz. Vale, sin duda, la siguiente máxima: *si hago, entiendo*.

Se estudiaron entonces múltiples actividades que llevaran a lograr este objetivo que, en un primer momento, parece no tener ninguna relación con la matemática, de por sí abstracta (por ejemplo, Caldelli y D'Amore, 1986; D'Amore, 1988a, b, 1989a, b, 1990-1991).

Al iniciar la década de 1980, un gran número de Provveditorati agli Studi de Italia (Direcciones escolares provinciales, representaciones locales del Ministerio Italiano de la Instrucción Pública, con poderes autónomos de decisión), sensibles a este tipo de experiencias didácticas, concedían una descarga académica: es decir, algunos docentes cambiaban su estatus de docente y se convertían en expertos de laboratorio. Esto se presentó, en particular, en la ciudad de Bolonia (en un cierto momento se llegó a tener 10 docentes en esta condición) y en la provincia (Imola, Castel San Pietro) y Lugo (Ravena).

En nuestra concepción, el laboratorio es, por tanto, un lugar diferente del aula, dotado de todos los instrumentos necesarios para la elaboración de un objeto concreto hecho por un alumno, donde hay un técnico específico a disposición que ayuda a los estudiantes desde un punto de vista concreto. En la discusión entre docente y estudiantes en el aula, se evidencia un problema conceptual matemático, se interpreta desde un punto de vista concreto, se transforma en el proyecto de un objeto que reúna ciertas condiciones y que resuelva ciertos problemas. Individualmente o en grupo, el estudiante, en ciertos horarios, abandona el aula y se transfiere al laboratorio, donde el proyecto tiene que transformarse en un objeto concreto. El objeto terminado se discute entre el grupo y el técnico. En un segundo momento, superada la discusión, se lleva al aula, se propone al docente y a los compañeros de clase, explicándolo desde un punto de vista matemático. Los resultados eran considerados excelentes y la aprobación de esta modalidad era total. Pero ya a mediados de los años 1980, nuestros análisis didácticos y las observaciones empíricas en aula comenzaron a mostrar los límites de esta metodología didáctica (D'Amore, 1988a, b).

En el laboratorio se manifestaban casos de rechazo a la metodología, por ejemplo, en estudiantes poco interesados en el "bricolaje"; se presentaron situaciones análogas a las producidas por el contrato didáctico en el aula. Una vez construido el objeto-modelo, se encontraba dificultad para reinterpretarlo sobre la base del problema matemático que sustentó su construcción; así como muchos otros problemas didácticos.

Hoy, el laboratorio de matemática existe aún, y somos partidarios de él y lo proponemos como metodología didáctica, incluida la fase de las muestras abiertas al público (D'Amore y Giovannoni, 1997). Sin embargo, debido a los análisis hechos por nosotros mismos y a la concientización alcanzada, nos vimos obligados a reconocer que es necesario considerar sus límites y poner de manifiesto las contraindicaciones en el uso de esta metodología didáctica (D'Amore y Fandiño Pinilla, 2003).

El laboratorio como modalidad didáctica de enseñanza-aprendizaje existe aún y se trata de una excelente modalidad a la cual se hace referencia incluso hoy (D'Amore y Marazzani, 2005, 2011). No obstante, al hacer uso de esta modalidad, es necesario considerarla críticamente, tener en cuenta los estudios científicos que se han hecho sobre ella: nadie puede aún pensar en el laboratorio como una panacea o como una metodología cien por ciento positiva.

1.6 Uso de la historia de la matemática en la enseñanza de la matemática

Pensamos que, así como la literatura se estudia a través de su historia, también puede resultar interesante dar a los estudiantes informaciones de carácter histórico sobre la matemática (D'Amore, 2004). Existe una gran diferencia entre el italiano de Dante Alighieri (1265-1321) y el italiano de Italo Calvino (1923-1985). Existe una gran diferencia entre el español de Miguel de Cervantes Saavedra (1547-1616) y el español de Gabriel García Márquez (1927-2014). En ocasiones, se tiene la impresión de que la matemática es ahistórica, que Pitágoras, Descartes y Peano fueron colegas contemporáneos; sin embargo, entre el primero y el último hay un intervalo de 2 500 años, lo que sorprende a muchos y no sólo a los estudiantes.

Considerando siempre el punto de vista del aprendizaje del alumno, fuimos activos defensores del hecho de que muchas cuestiones matemáticas pueden proponerse, fácil y significativamente, recurriendo a hechos históricos y, en esta misma dirección, contribuimos fuertemente en la creación de materiales apropiados para esta transposición didáctica (por ejemplo, D'Amore y Speranza, 1989, 1992, 1995), pero las contribuciones en este sentido de diferentes autores son muchas más.

Más aún, teorizamos el hecho de que el uso de la historia puede ser presentado en tres planos diferentes:

- epistemológico-crítico,
- cronológico y
- anecdótico,

con funciones didácticas profundamente diferentes (D'Amore, 2004).

En relación con la formación de los docentes, además, siempre hemos insistido en la importancia de una formación:

- en primer lugar: disciplinar (pertenecemos al mundo de quienes consideran que no puede enseñar la disciplina X quien no sea un óptimo conocedor de X);
- en segundo lugar: didáctica (conocer la disciplina X es condición necesaria pero no suficiente para enseñar X: hoy existe la didáctica de la disciplina X),
- en tercer lugar: histórica y epistemológica.

Este último aspecto no sólo es necesario por motivos culturales (que a nosotros nos parecen obvios), sino también por motivos profesionales: la didáctica de la matemática, y con mayor precisión la teoría de los obstáculos (D'Amore, 1999), mostró ampliamente la existencia de obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de la matemática (D'Amore, Radford y Bagni, 2006; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sbaragli, 2008). Sin embargo, si en verdad se quiere ayudar a un estudiante con dificultades y si la naturaleza del obstáculo es de tipo epistemológico, es necesario el conocimiento de la historia (también epistemológica) del objeto matemático que se transformó en obstáculo para el aprendizaje.

En el transcurso de los años, hicimos la siguiente hipótesis: en la introducción de un objeto matemático para su aprendizaje, es útil dedicar tiempo a la historia de dicho objeto o, por lo menos, al periodo histórico o al personaje que lo creó; una actividad de este tipo activa el interés hacia el objeto. En esta hipótesis estamos de acuerdo con varios estudiosos (Fauvel y Van Maanen, 2000; Bagni, 2004a, 2004b, 2004c; Bagni, Furinghetti y Spagnolo, 2004).

Pero al usar esta metodología, ¿qué garantías tenemos sobre el aprendizaje efectivo del objeto matemático propuesto? Aun siendo defensores convencidos del uso de la historia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, debemos denunciar el hecho de que la ecuación ingenua:

uso de la historia en la enseñanza = aprendizaje seguro

no funciona automáticamente.

Es cierto que tener siempre a disposición un contexto histórico produce cultura y tiene grandes potencialidades, pero la certeza de activar el interés y, como consecuencia, alcanzar el aprendizaje no están banalmente relacionadas con estos factores ni con estos contenidos.

Aun con estas limitaciones, consideramos que el conocimiento tanto de la historia como de la epistemología de la matemática es necesario en la formación de los docentes, pero esto no significa que tengan que ser utilizados como instrumentos didácticos explícitos con los estudiantes; si se decide hacer uso de la historia con este fin, se requiere mucha cautela. Por sí sólo, este instrumento metodológico es apreciable, pero no es una panacea. Haberlo considerado como tal en un reciente pasado fue una de las tantas ilusiones.

1.7 Adopción de currículos o de proyectos extranjeros

Una actitud típica del mundo de la didáctica activa, pero no de la investigación, es la de considerar que los currículos nacionales no están a la altura de la situación actual y, como consecuencia, miran con admiración los currículos de otros países. Por ejemplo, un determinado país extranjero tiene éxito en las pruebas PISA y, por tanto, se piensa que el sistema escolar de dicho país es el más adecuado, digno de ser imitado e importado. Esta actitud superficial e ingenua no se encontró sólo en el pasado; leemos continuamente palabras de ministros, o de los llamados expertos o de profesionales de la educación, que sueñan con importar a sus países metodologías instrumentales utilizadas en los países cuyos estudiantes tienen éxito en las pruebas PISA, con la esperanza de poder resolver así el fracaso de los estudiantes de sus propios países en relación con la matemática.

En ese tiempo, siempre como ejemplo, se difundió en Italia la idea ilusoria de usar como libros de matemática para la escuela primaria textos escolares finlandeses, sin siquiera traducirlos (idea que hace proselitismo entre las personas acríticas). La red italiana está saturada de comentarios con este propósito y, en numerosas localidades, se están difundiendo banalidades acerca del uso de estos textos, considerándolos la solución a los problemas del aprendizaje de la matemática.

Todo esto se traduce generalmente en importar programas de otros países o en adoptar proyectos didácticos que han tenido éxito en otros contextos. Estos sueños, vagamente xenófilos, aun en sus obvias y evidentes diferencias, son análogos. En el pasado, algunos países, que se autoconsideraban inferiores con respecto al desarrollo, llamaban a “expertos” en modelos extranjeros, les encomendaban la formación de los docentes sobre los nuevos currículos y absorbían sus experiencias. Podríamos tener varios ejemplos concretos, de los cuales tuvimos conocimiento personal. Este comportamiento siempre ha sido un fracaso.

El currículo de matemática de un país debe expresar también la historia social y la historia cultural de dicho país, por lo que no puede ser aséptico, acultural ni ahistórico. No tenemos conocimiento de ningún ejemplo positivo de adopción de modelos del exterior que haya tenido éxito en el aprendizaje. Y la situación es análoga en relación con los proyectos extranjeros. En Italia, por ejemplo, se tradujeron los proyectos RICME (húngaro) (en 1976), Nuffield (de 1967) y el School Mathematics Project (de 1972) (ingleses), Scottish Mathematics Project (se tradujo sólo en mínima parte en la década de 1970) y Fife Project (1978) (estos dos últimos, escoceses) y tantos otros. Se trataba, sin duda alguna, de proyectos interesantes, estimulantes y curiosos, pero abandonados rápidamente por su lejanía a la sensibilidad y a las expectativas de los docentes italianos.

Como decíamos líneas arriba, y como lo ratificamos, un proyecto refleja la identidad cultural, matemática y epistemológica del país en el que nace, así como la práctica didáctica de este país y, por tanto, una cierta manera de pensar. Es verdad que se pueden tomar ejemplos extranjeros, pero en ocasiones se entra en abierto conflicto.

Un proyecto didáctico o un currículo deben ser compartidos, pensados y construidos de común acuerdo; deben respetar la manera de pensar y de ser profesional de cada uno de los docentes. Esto no quiere decir que un currículo o un proyecto extranjero no puedan dar ideas concretas (metodológicas y conceptuales) al docente, es más, seguramente lo harán. Pero confiar en estos con fe ingenua y acrítica ciertamente no ayuda en el proceso profesional de enseñanza y aprendizaje.

El conocimiento crítico de currículos y proyectos extranjeros es, sin duda, de gran ayuda porque abre al mundo y ciertamente sugiere ideas estimulantes. Su uso acrítico no puede ser una panacea, se trata sólo de una idea ilusoria un poco banal.

Una última nota. Para nosotros, un currículo o un proyecto son la expresión de una cultura local del país y representan de algún modo su historia. Pero los resultados de la investigación en didáctica de la matemática, por el contrario, son universales. El contrato didáctico, el fenómeno de la formación de *misconcepciones*, lo inadecuado de ciertos modelos intuitivos respecto a los modelos formales, la dificultad en la gestión de las transformaciones semióticas, el problema del aprendizaje de la generalización, etcétera, son la evidencia de problemáticas en el proceso de aprendizaje que se pueden considerar comunes a todos los países. Recientemente, algunos estudiosos quisieron discutir la veracidad de la última afirmación, proponiendo que los estudios de didáctica de la matemática deberían ser locales y, por tanto, focalizados en el país, sus tradiciones y su historia cultural. Nosotros no excluimos que se puedan hacer consideraciones de este modo de pensar (más aún, somos conscientes y estamos de acuerdo con D'Ambrosio, 2002); pero en general, el interés de la didáctica de la matemática es general y no local.

2. LOS INSTRUMENTOS ILUSORIOS

En este apartado presentaremos algunos materiales concretos o recursos didácticos que fueron pensados como idóneos para la enseñanza de algunos temas de la matemática, en particular, para la enseñanza de la aritmética y la lógica. El énfasis que se creó alrededor de estos instrumentos fue siempre excesivo, ya que fueron tomados como verdaderas panaceas para el aprendizaje, mientras que su creación hacía referencia sólo a metodologías concretas de la enseñanza. Presentaremos sólo algunos, pero estos materiales (llamados algunas veces "materiales estructurados", a causa de su especificidad y de las detalladas reglas de uso), continúan utilizándose todavía hoy, aunque con énfasis siempre menor, mientras que otros "inventores", en diferentes países, continúan creando ilusiones en los docentes menos críticos.

Entre los materiales que no mencionaremos específicamente, tenemos dos categorías.

a) Los juegos lúdicos que hacían referencia al aprendizaje bajo eslóganes como: *Aprender jugando*. Por lo general se trataba sólo de juguetes cuya función dentro del aprendizaje quedaba algo escondida o aparecía como ingenua. Un análisis científico de la eficacia de estos juguetes deberá ser afrontado algún día por un estudioso.
b) El uso de las TIC como garantía de aprendizaje. Este tema necesita un análisis profundo detallado y específico, dada la vastedad de los instrumentos hoy disponibles. Pero los estudios sobre las ilusiones en ocasiones acríticas que se desarrollaron alrededor de estos temas son múltiples, por ejemplo, Davis (1992) habla explícitamente de panaceas. Pero ya al alba del uso de varios instrumentos, en particular la PC en la escuela, había voces que intentaban frenar los entusiasmos fáciles y banales (por ejemplo, D'Amore, 1988c).

Como lo hemos dicho, estas dos tipologías de instrumentos (a y b) requieren un análisis específico que aquí no haremos.

2.1 Las regletas o números en colores

Se trata de materiales por lo general de madera con forma de prismas cuadrangulares regulares; el primero (blanco) es un cubo, es decir, la altura del prisma es la misma del lado del cuadrado de base; el segundo (rojo) tiene el doble de la altura del primero; el tercero (verde) tiene el triple de la altura del primero; y así sucesivamente hasta alcanzar una altura diez veces mayor que la altura del primero, y el color del prisma cambia a medida que cambia la altura de este.

La ideación teórica se debe al matemático, pedagogo y filósofo egipcio Caleb Gattegno (1911-1988), y la realización práctica y la relativa experimentación en la práctica didáctica se debe al pedagogo belga Georges Cuisenaire (1891-1975).

La idea original consiste en agregar una variable semiótica a las ya evidentes diferencias de altura entre los prismas para enseñar a dominar los números naturales del 1 al 10 y la suma de dos o más números naturales igual a 10 (1 + 9, 2 + 4 + 4, y así sucesivamente); es decir: juntando prismas de longitudes diversas hasta alcanzar el prisma de altura 10. En todo esto, el color tiene una función de gusto estético, pero ciertamente ninguna importancia de carácter didáctico.

Tuvimos manera de evidenciar los desaciertos didácticos que se esconden detrás de estos instrumentos que, no obstante, tuvieron una gran popularidad y un gran éxito intercontinental. La idea de agregar a las ya tantas variables semióticas de los números naturales la variable cromática, ciertamente agradable y por tanto atractiva, esconde trampas o dificultades no banales (Locatello, Meloni y Sbaragli, 2008).

La primera es que no existe ninguna "lógica cromática" en los modelos de las operaciones elementales: los colores son del todo casuales, no podría ser de otra manera. Rojo más Verde igual a Amarillo no tiene ninguna motivación de carácter cromático.

La segunda es que los números que se citan representan medidas lineales, las alturas de los prismas cuya base es la misma para todos, pero cuya altura es diferente; sin embargo, no es posible una interpretación cardinal ni ordinal de los números (a menos que se hagan forcejeos innaturales); por consiguiente, se pierden o se olvidan significados importantes que forman parte de la construcción cognitiva del conjunto de los números naturales (Marazzani, 2007).

La tercera es que no existe ninguna representación del número cero, salvo la ausencia del objeto; por tanto, no se puede representar $7 + 0$; el número natural cero queda excluido de este instrumento.

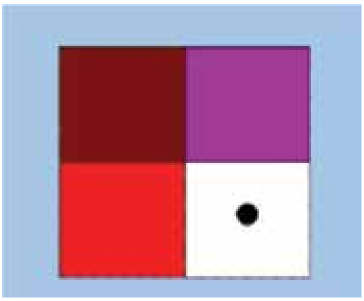
En nuestra opinión, estas graves lagunas y estas evidentes contradicciones no implican automáticamente que no puedan utilizarse las regletas (o números en colores). Todo artefacto humano tiene sus potencialidades positivas; en este caso, por ejemplo, el control directo de las alturas, lo agradable del objeto en sí, la posibilidad de hacer algunas adiciones haciendo simples junturas.

Lo importante es no caer en el engaño ilusorio de la panacea: este instrumento tiene también implicaciones negativas que es necesario conocer; es preciso no idealizar el instrumento como si fuera el mejor entre todos, como si fuera la solución a todos los problemas de aprendizaje. Porque las cosas no son así. Por tanto, es necesario conocer bien las ventajas y desventajas para usar este instrumento, cualquier instrumento, con atención y capacidad crítica. Es necesario dominar el instrumento y no permitir que el instrumento nos domine.

2.2 Los ábacos

La primera ocasión que vimos usar el ábaco en una escuela primaria, al iniciar la década de 1970, se nos presentó como un instrumento cuyo fin era permitir pasar, de manera casi automática, de una base numérica a otra; no por nada se llamaba en ese entonces "ábaco multibase". Entonces era difusa la extravagante idea de que, para poder dominar los nuevos instrumentos informáticos que estaban ingresando en las aulas, se debían dominar varias bases numéricas: la base diez, obviamente, pero también la base cuatro, la seis, la dos...

Para poder usar las PC (algunos hablaban en ese entonces de programar), los estudiantes debían saber gestionar los cálculos en base dos, lo cual explicó también el momentáneo éxito del llamado minicomputador de Georges Papy (1920-2011): un cuadrado de cartón dividido por sus dos medianas en cuatro cuadrados que daban valores diversos a las fichas colocadas en cada uno de ellos (respectivamente, 2^0, 2^1, 2^2 y 2^3).

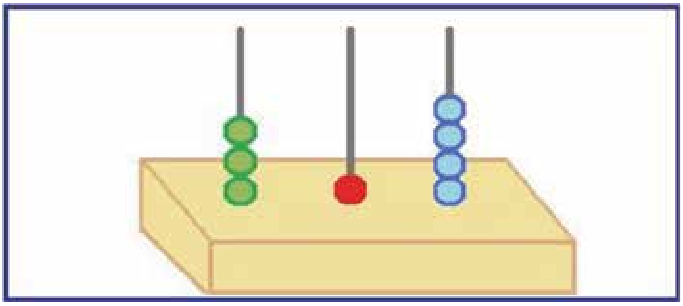


Hoy sabemos que todo esto es totalmente inútil. Para usar las PC, no es necesario saber programar ni mucho menos sirve saber usar con habilidad el sistema numérico de base dos; queda viva y difundida la propuesta didáctica que siempre viene sugerida y evidenciada para controvertir nuestras perplejidades: el ábaco es un buen instrumento para mostrar a nuestros estudiantes que no existe sólo la base diez.

Desde ese tiempo, dijimos a los docentes (y continuamos haciéndolo) que nos parece mucho más interesante mostrar a los estudiantes que existen sistemas numéricos posicionales y sistemas numéricos no posicionales, porque esto muestra a los alumnos lo importante y genial de la idea del sistema posicional, el cual genera, por ejemplo, algoritmos de cálculo simples y rápidos, algoritmos que no hacen necesarios los ábacos para realizarlos, ni piedritas ni otros materiales concretos, ya que basta una hoja de papel y un lápiz. Quienquiera puede intentar realizar la multiplicación 14×6 con lápiz y papel, lo cual resulta banal en el sistema indo-arábigo, pero muy complicado en el romano: XIV $\times$ VI...

En este punto, el ábaco se vuelve un instrumento obsoleto, sí, pero curioso, interesante, siempre que sirva no sólo para representar los números, sino también para realizar (intentar realizar) las operaciones.

Aunque el ábaco es un instrumento simple y atractivo, es necesario repensar su función didáctica; un objeto histórico, colocado en el tiempo, interesante, pero ciertamente no una panacea. Se puede utilizar básicamente para mostrar el significado del valor posicional de las cifras que expresan números naturales. Pero debe ser un objeto concreto, posible de tocar y manipular, no sólo un diseño en el tablero o en el libro de texto. Cada columna debe contener nueve bolitas, o fichas; porque, en el momento de agregar la décima, las nueve ya colocadas y la décima de agregar se deben quitar y sólo una de ellas debe colocarse en la columna inmediata a la izquierda. Este es el sentido del sistema de base diez.



314

Pero aquí se anida otro extraño modo "cromático" de ver las cosas. En más de una ocasión, hemos escuchado decir a algunos docentes que las bolitas de las unidades *deben* ser blancas y las de las decenas, rojas: cada una de las bolitas rojas vale 10 bolitas blancas. Esta desafortunada idea es contraria al propio sentido del valor posicional de las cifras; sería como decir que en el numeral 322 la cifra 2 en el centro debe colorearse de rojo, mientras que la cifra de la derecha debe colorearse de negro. El significado del valor posicional es que una cifra, *la misma cifra*, tiene valores diversos según el *puesto* que ocupa, no según *el color* que tenga. Supongamos que un estudiante en la oscuridad toma en la mano tres bolitas. Encendemos la luz. A la pregunta: "¿Cuántas bolitas tomaste?", la respuesta esperada es "tres"; no es, no puede ser "No lo sé, depende del color de cada una de ellas".

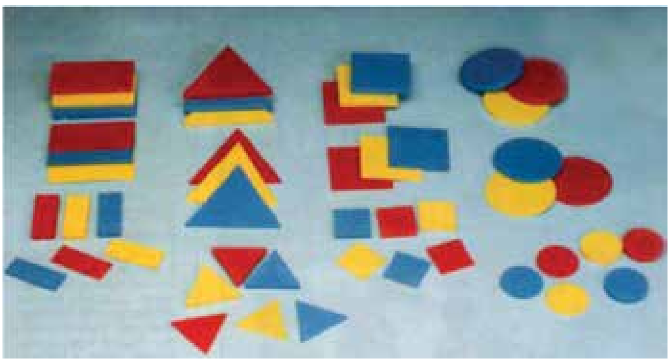
Lo repetimos parcialmente. El sentido aritmético del ábaco es el siguiente: se colocan bolitas perforadas, una a la vez, en la primera columna a la derecha del ábaco; hasta nueve todo va bien; pero cuando se intenta colocar la décima, no será posible, porque el asta donde se están colocando es corta y sólo permite nueve bolitas; entonces, se retiran todas las nueve bolitas ya colocadas y se coloca una en la segunda columna, contando desde la derecha, es decir, la columna de las decenas. Esta bolita representa 10 bolitas, no con base en el color, sino con base en la posición.

El ábaco, por tanto, con todas sus implicaciones y consecuencias, debe ser repensado desde el inicio. Como muchos instrumentos creados por el ser humano, tiene aspectos positivos y negativos. Ciertamente no constituye una panacea.

También las nuevas versiones del ábaco, surgidas en los últimos lustros, tienen aspectos positivos, pero también poseen otros que no se deben eludir: son instrumentos, nada más, no son la solución ni constituyen panaceas. Bienvenidos si se tienen bajo control crítico desde el punto de vista del aprendizaje, pero no deben constituir nuevas ilusiones o crear nuevas recetas.

2.3 Los bloques lógicos

Los llamados "bloques lógicos" fueron creados por el matemático húngaro Zoltan Paul Dienes (1916-2014), uno de los teóricos más influyentes de la New Mathematics a partir de los años 1960. La fama de este instrumento es tal, que no consideramos necesario explicar de qué se trata.



Desde finales de la década de 1950, Dienes se dedicó a plantear teorías con el fin de ilustrar algunos aspectos cognitivos de la matemática de carácter constructivista postpiagetiano; pero apenas a mediados de la década de 1960 su fama fue internacional (Dienes, 1966).

Las ideas de Dienes circularon con extrema desenvoltura en muchas escuelas en el ámbito mundial; pero la aguda crítica que hizo Guy Brousseau (Brousseau, 1986) acabó con toda la ilusión que se había creado alrededor de las propuestas de Dienes, no sólo sus famosos y omnipresentes bloques lógicos, sino toda su construcción teórica. Brousseau llegó a definir un "efecto Dienes" de manera totalmente negativa, con un análisis tan potente y evidente que eliminó toda posibilidad de reacción (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy, 2010).

Los bloques lógicos (y otros instrumentos para la enseñanza creados por el propio Dienes) tuvieron fama mundial, fueron usados por más de una generación de estudiantes; pero ninguna caja preconfeccionada puede producir aprendizaje; eso sí, puede generar aprendizaje local y circunstanciado (Bruner, 1990). Sin embargo, como lo hemos ya escrito en muchas ocasiones, el "*transfer* cognitivo" (es decir el pasaje de construcción cognitiva de un ambiente a otro) no es automático y los aprendizajes relacionados con un ambiente prefabricado o preconstituido, si se alcanzan, se alcanzan en ese ambiente, porque el aprendizaje del ser humano es situado y su *transfer* o su generalización es tarea típica de la didáctica, no es espontánea ni automática (Lave y Wenger, 1990; D'Amore, 1999; D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani y Sarrazy, 2010).

Los "materiales estructurados", como fueron llamados en general, producen aprendizaje en el interior de ellos mismos, localmente; por consiguiente, sirven poco, no sirven en absoluto o son, de hecho, contraproducentes. Ciertamente, un joven estudiante aprende, según sus condiciones, a reconocer que "el conjunto de los círculos amarillos es un subconjunto de los círculos", pero esto no le sirve para concluir espontáneamente, como lo hubiera querido la *mathématique vivante* de Dienes (1972) con un pasaje automático de *transfer* cognitivo, que "el conjunto de los cuadrados es un subconjunto de los rombos". Esta afirmación se adquirirá en otro momento, no es consecuencia directa, no se basa en lo que el estudiante aprendió trabajando con los bloques lógicos de una caja predispuesta.

Aún menos, cuesta trabajo creer que jugando con cuatro notas musicales y aplicando a estas una cierta operación binaria interna, el niño de siete años "estructure su mente" para aprender el concepto de grupo abstracto de tal modo que esté ya disponible para aprender las estructuras algebraicas del mismo tipo, como la formada por las isometrías con la operación binaria de composición (Dienes, 1972; estos ejemplos son tomados del texto citado). Al releer hoy estos sueños, no se logra creer que alguien haya podido pensar razonablemente que esto fuera posible. Pero el estudio de Brousseau (1986) evidenció perfectamente la vacuidad de todo esto.

Lo anterior no quiere decir que no se pueda utilizar este instrumento, basta que no se confunda con panaceas inexistentes y que quien lo proponga en el aula lo haga *cum grano salis*, consciente de los límites, sin vacuas ilusiones. Todo aquello que de matemática se puede hacer con los bloques lógicos se puede hacer con hojas, tapas de botella, figuras de álbumes, fichas de juegos.

3. ALGUNAS AFIRMACIONES PARA CONCLUIR

El sueño de las recetas destruye la profesionalidad de los docentes.

El proceso de enseñanza y aprendizaje es complejo, inútil ilusionarse e ilusionar, no existen recetas. Además, cada estudiante aprende según su propio carácter (Fandiño Pinilla, 2001).

Nadie puede enseñarte a enseñar, tu clase es un unicum.

Como norma, es necesario desconfiar de quien se presenta como alguien capaz de enseñar a enseñar. La tarea de la investigación en didáctica de la matemática no es esta. Por el contrario, dejando plena libertad al profesional de la educación, es decir al docente, de usar las metodologías que considere mejores (en plural), la tarea de la investigación en didáctica de la matemática es la de mostrar y proponer instrumentos concretos para interpretar las situaciones de aula, cuyo esquema es mucho más complejo de lo que podría pensarse en un primer momento, y está formado por maestro, alumno y saber.

El uso de una única metodología de enseñanza lleva al fracaso.

Puesto que cada estudiante aprende según sus propias características, el uso en el aula de una única metodología o modalidad didáctica puede ser exitosa para algunos individuos, pero no para todos. Utilizando diversas modalidades, se aumenta la posibilidad de favorecer el aprendizaje de un mayor número de estudiantes presentes en el aula (D'Amore, 1999).

Sólo la investigación científica hace válidos los resultados.

Nunca confiar en quien no somete al juicio científico serio y pertinente lo que presenta como propuesta de enseñanza (Lederman y Abell, 2007).

El análisis didáctico serio y científico muestra (en ocasiones sorpresivamente) que ciertas actividades dadas por descontadas esconden problemas cognitivos.

Nos limitamos sólo a un ejemplo. En la escuela primaria se utiliza la recta numérica. Algunos docentes la hacen iniciar de cero, otros la hacen partir de 1. Esta "línea" es tan difundida que se termina por creer que es "el modelo" perfecto de los números naturales (cuyo conjunto indicamos con N). Pero los estudios analíticos, por ejemplo, los realizados por la escuela de Athanasios Gagatsis (véase, por ejemplo, Gagatsis, Shiakalli y Panaoura, 2003; Elia, 2011), mostraron varias dificultades e incongruencias.

Comenzamos a pensar en el hecho de que el modelo de N representado por la línea de los números es sólo un modelo ordinal, no cardinal; por tanto, no representa una parte conspicua de significados intuitivos de N. En otras palabras, aquel modelo por sí solo no es completo. Esto representa más una sucesión ordenada que un conjunto numérico cuyos elementos están en posibilidad de responder a la pregunta: "¿Cuántos son?".

Y además, ¿por qué la distancia entre un número n y su sucesivo $n + 1$ debe ser igual a la distancia entre m y $m + 1$? No existe ningún motivo, si se piensa que en N, entre n y $n + 1$ no hay nada, existe el vacío, el conjunto N ordenado es discreto.

Existe además el problema de que los números naturales sirven también en el campo de la medida; en tal caso, la *línea de los números* se puede pensar como el borde escrito de una regla en la cual los números indican distancias desde el extremo 0. Una confusión que el adulto tal vez domina (aunque tenemos nuestras dudas), pero que el joven estudiante no puede controlar.

Además, existe el problema de las operaciones. En N la operación $3 + 5$ tiene como modelo intuitivo, generalmente propuesto por el mismo docente como único, el "unir cardinalidades", la cardinalidad 3 (un conjunto de 3 bolitas) con la cardinalidad 5 (otro conjunto de 5 bolitas). Pero en la línea de los números, este modelo intuitivo se altera y el correcto es de tipo ordinal: partir de 3 y dar 5 pasos o saltos haca la derecha. $3 + 5$ no debería escribirse ni siquiera así, casi no tiene sentido escribirlo así. Se trata de un nuevo modelo, muy poco intuitivo, que funciona sólo porque se supone, en la base, un isomorfismo entre los modelos cardinal y ordinal.

Muchos jóvenes estudiantes, por ejemplo, encuentran dificultades en la interpretación sobre la línea de los números de una operación como $5 + 0$ que, para muchos de ellos, no tiene sentido. Además, hablando de cardinales, $5 + 0$ es 5 sin duda alguna; hablando de ordinales muchos estudiantes no aceptan ni siquiera la escritura $5 + 0$, al considerarla sin significado. Para no hablar de la sustracción, que crea problemas inesperados que están bajo los ojos de todos los docentes. Otra cosa, si la línea de los números se hace partir de 1, como lo hemos visto en muchas ocasiones, entonces todo esto no sólo pierde sentido, sino que se está cometiendo un error. Por ejemplo, no se puede efectuar $5 - 0$, es decir algo que parece muy natural: partir de 5 e "ir" a la izquierda 0 pasos.

Tomamos como ejemplo este modelo para N por ser muy difundido, con el fin de mostrar la manera en que instrumentos que parecen inofensivos e ingenuos y adoptados por muchos esconden, por el contrario, peligros profundos. Lo elegimos precisamente por la difusión que tiene, para sugerir atenciones críticas a todos los docentes, profesionales de la formación de los ciudadanos del mañana.

¿Qué sería la multiplicación sobre la línea de los números? ¿Cómo se pasaría de la adición a la multiplicación? Por lo general se termina con la adición y la sustracción, ya que el modelo de la línea de los números no permite seguir adelante y, parece obvio, un modelo que no permite seguir adelante, evidentemente no es un gran modelo.

Lo cual no significa que no pueda utilizarse este modelo de N; significa sólo que, quien lo use, lo debe estudiar con atención crítica y no creer que es didácticamente indoloro. (En general, sobre este punto puede verse: D'Amore, 1999.)

4. EL NUDO CENTRAL: LA FORMACIÓN DE LOS DOCENTES DE MATEMÁTICA

Formar docentes de matemática en todos los niveles escolares, como ya lo dijimos, implica formación matemática (*in primis*), formación en didáctica de la matemática, formación en historia y epistemología de la matemática (D'Amore, 2004). Pero todo lo que aquí quisimos evidenciar incide en una capacidad crítica que debe convertirse en sensibilidad del futuro docente. Sólo esta sensibilidad debería eliminar por siempre la afanosa búsqueda de la receta y expulsar para siempre del mundo de la escuela a quienes las proponen. Pero la sensibilidad no es posible enseñarla, depende específicamente de la personalidad profesional del docente.

La labor de formadores de seres humanos no es fácil, no puede reducirse a recetas, es un trabajo creativo que cada día requiere nuestra capacidad crítica, siempre atenta y vigilante. Si fuese reconducida a recetas, cualquier persona podría ser docente, y con éxito. Sin embargo, el docente se irrita cuando un extraño al mundo de la formación lo critica o le sugiere métodos diferentes o tiempos diferentes de los que él considera apropiados. Además, al aplicar metodologías de enseñanza que se consideran correctamente funcionales para el aprendizaje, el docente utiliza la propia competencia, que no sólo es *en matemática*, sino que también es una *competencia matemática*, muy diferente de la competencia de un matemático profesional o de un ingeniero (Fandiño Pinilla, 2003, 2006; D'Amore, Godino y Fandiño Pinilla, 2008).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AA. VV. SMP (de 1965), *SMP School Mathematics Project*, Cambridge, Cambridge University Press.

Adler, J. (2000), "Conceptualising Resources as a Theme for Teacher Education", *Journal of Mathematics Teacher Education*, vol. 3, núm. 3, pp. 205-224. Doi: 10.1023/A:1009903206236.

Adler, J., D. Ball, K. Krainer, F. L. Lin y J. Novotna (2005), "Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education", *Educational Studies in Mathematics*, vol. 60, núm. 3, pp. 359-381. Doi: 10.1007/s10649-005-5072-6.

Artigue, M., R. Gras, C. Laborde y P. Tavignot, (eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Bagni, G. T. (1996), *Storia della matemática*, vol. II, Bolonia, Pitagora.

——— (2004a), "Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche", *La matematica e la sua didattica*, vol. 18, núm. 3, pp. 51-70.

——— (2004b), "La storia della scienza: dall'epistemologia alla didattica", *Progetto Alice*, vol. 15, pp. 547-579.

——— (2004c), "Insegnamento-apprendimento storico", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 27A-B, núm. 6, pp. 706–721.

Bagni, G. T. y B. D'Amore (2007), "A trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler", *Scuola ticinese*, vol. 36, núm. 281, pp. 10-11.

Bagni, G. T., F. Furinghetti y F. Spagnolo (2004), "History and Epistemology in Mathematics Education", en L. Cannizzaro, A. Fiori y O. Robutti (eds.), *Italian Research in Mathematics Education 2000-2003*, Milán, Ghisetti e Corvi, pp. 170-192.

Boero, P. (1986), "Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare", *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 9, núm. 9, pp. 48-93.

Boero, P., C. Dapueto y L. Parenti (1996), "Didactics of mathematics and the professional knowledge of teachers", en A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.). *International handbook of mathematics education*, Dordrecht y Londres, Kluwer Academic Publishers, pp. 1097-1121. Doi: 10.1007/978-94-009-1465-0_30.

Brissiaud, R. (1988), "De l'âge du capitaine à l'âge du berger. Quel contrôle de la validité d'un énoncé de problème au CE2?", *Revue française de pédagogie*, núm. 82, pp. 23-31.

Brousseau, G. (1965), *Les mathématiques du cours préparatoire*, Parigi, Dunod.

——— (1972), "Processus de mathématisation", *La mathématique à l'école élémentaire*, París, APMEP, pp. 428-457.

——— (1980a), "Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire", *Revue de laryngologie, otologie, rhinologie*, vol. 101, núms. 3-4, pp. 107-131.

——— (1980b), "L'échec et le contrat", *Recherches en didactique des mathématiques*, núm. 41, pp. 177-182.

——— (1982), *À propos d'ingénierie didactique*, Université de Bordeaux I, IREM.

——— (1984), "Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage", *Actes du colloque de la troisième Université d'été de didactique des mathématiques d'Olivet*.

——— (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Tesis para el doctorado de estado, Université de Bordeaux I.

——— (1986), "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7, núm. 2, pp. 33-115.

——— (2015), "Peregrinaciones en la didáctica de la matemática", en B. D'Amore y M. I. Fandiño Pinilla (eds.), *Didáctica de la matemática. Una mirada internacional, empírica y teórica*, Chía (Colombia), Universidad de la Sabana, pp. 13-28. ISBN: 978-958.12.0371.0.

Brousseau, G. y B. D'Amore (2008), "I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall'empirico al didattico", en B. D'Amore y S. Sbaragli (eds.) (2008), *Didattica della matematica e azioni d'aula*, Actas del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matemática, Castel San Pietro Terme (Bo), 7, 8 y 9 de noviembre de 2008, Bolonia, Pitagora, pp. 3-14.

Brousseau, G. y J. Perez (1981), *Le cas Gaël*, Université de Bordeaux I, IREM.

Bruner, J. (1990), *Acts of Meaning*, Cambridge (MA), Harvard University Press.

Caldelli, M. L. y B. D'Amore (1986), *Idee per un laboratorio di matematica nella scuola dell'obbligo*, Florencia, La Nuova Italia.

Camici, C., A. Cini, L. Cottino, E. Dal Corso, B. D'Amore, A. Ferrini, M. Francini, A. M. Maraldi, C. Michelini, G. Nobis, A. Ponti, M. Ricci y C. Stella (2002), "Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura?", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 25, núm. 3, pp. 255-270.

Cornu, B. (1994), "Teacher Education and Communication and Information Technologies: Implications for Faculties of Education", en B. Collis, I. Nikolova y K. Martcheva (eds.) (1995), *Information technologies in teacher education. Issues and experiences for countries in transition. Proceedings of a European Workshop*, París, UNESCO, pp. 93-104.

D'Ambrosio, U. (2002), *Etnomatematica*, Bolonia, Pitagora.

D'Amore, B. (1975), *La matematica inventata*, Bolonia, Pitagora.

——— (1981), *Mostra dei materiali utilizzati per l'educazione matemática*, Catálogo-presentación de la muestra efectuada en la Escuela primaria "G. Garibaldi" de Bolonia, del 30 mayo al 6 junio de 1981, Bolonia, Direzione didattica XV circolo-Assessorato P.I. del Comune di Bologna.

——— (1982a), *Introduzione al catalogo della mostra* "Esposizione di matematica '81-'82", S. E. Gardolo (Tn), Trento, Provincia Autonóma de Trento, Assessorato Istruzione.

——— (1982b), *Cura e introduzione al catalogo della mostra: Un progetto di matematica in mostra*, mayo-junio de 1982, Scuola Elementare Scandellara, Bolonia, Comune di Bologna-Assessorato al coordinamento delle politiche scolastiche.

——— (1987a), *Una mostra di matemática*, Teramo, Giunti y Lisciani.

——— (1987b), "Cura e introduzione" del catalogo*: Un progetto di Matematica in mostra*, Scuola Elementare Scandellara, Bolonia, mayo-junio de 1987.

——— (1988a), "Introducción" al catálogo de la muestra: *Ma.S.E... giocassimo alla matematica*, mustra Ma.S.E. (Matematica Scuola Elementare), Imola (BO), inauguración: 14 mayo de 1988.

——— (1988b), "Il laboratorio di matematica come fucina di idee e di pensiero produttivo", *L'educazione matematica*, núm. 3, suplemento 1, pp. 41-51.

——— (1988c), "Evviva i burattini", *Scuola e Informatica - La Tartaruga*, núm. 2, pp. 20-23.

——— (1989a), "Introduzione" al catalogo: *I bambini e l'educazione matematica-Progetto Ma.S.E.* (Matematica Scuola Elementare), Lugo (Ra), inauguración: 23 de mayo de 1989.

——— (1989b), "Introducción", en *La Matematica fra i 3 e gli 8 anni - Guida alla visita dei laboratório*, Comune di Castel San Pietro Terme (Bo).

D'Amore, B. (1990-1991), "Imparare in laboratorio", *Riforma della scuola*, 4 puntate, vol. I, núm. 11, 1990, pp. 42-43; "Numeri e teoremi in camice bianco", vol. II, núms. 1/2, 1991, pp. 51-53; "Fare per saper pensare", vol. III, núm. 5, 1991, pp. 37-40; "Filosofia e linguaggi del laboratorio", vol. IV, núm. 9, 1991, pp. 36-38. [Resumen en: AA.VV. (1991), *Some italian contributions in the domain of the Psychology of Math. Ed.*, Génova]. [Resumen en M. Barra y otros (1992), *The Italian Research in Mathematics Education: Common Roots and Present Trends*, Quebec, ICME, agosto de 1992, p. 129]. [Este artículo fue reeditado por completo en apéndice en B. D'Amore y M. Picotti (1991), *Insegnare matematica negli anni novanta nella scuola media inferiore*, Milán].

——— (1991), "logica Logica LOGICA, la didattica della logica fra gli 8 e i 15 anni", en B. D'Amore (ed.) (1991), *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni*, Bolonia y Roma, Apeiron, pp. 79-90.

——— (1993a), *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*, Progetto Ma.S.E., vol. XA, Milán, Angeli. [Segunda edición, 1996, Prefacio de G. Vergnaud]. [En español: D'Amore, B. (1997), *Problemas. Pedagogía y psicología de la matemática en la actividad de resolución de problemas*, trad. de F. Vecino Rubio, Madrid, Síntesis].

——— (1993b), "Il problema del pastore", *La vita scolastica*, núm. 2, pp. 14-16.

——— (1995), "Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matemática", *La matematica e la sua didattica*, vol. 9, núm. 3, pp. 328-370.

——— (1999), *Elementi di didattica della matemática*, Prefacio de Colette Laborde, Bolonia, Pitagora. [En español: D'Amore, B. (2006), *Didáctica de la matemática*, Prefacio de Luis Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau, Bogotá, Editorial Magisterio. En portugués: D'Amore, B. (2007), *Elementos da Didática da Matemática*, Prefacio de Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde y Guy Brousseau, Sao Paulo, Livraria da Física. El libro fue comentado por Hermann Maier en *ZDM*, 2001, vol. 33, núm. 4, pp. 103-108].

——— (2001), "Una contribución al debate sobre conceptos y objetos matemáticos", *Uno*, núm. 27, pp. 51-78.

——— (2002), "Basta con le cianfrusaglie!", *La Vita Scolastica*, núm. 8, pp. 14-18.

——— (2003), *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Prefacio de Guy Brousseau, Bolonia, Pitagora. [En español: D'Amore, B. (2005), *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*, Prefacio de Ricardo Cantoral, México, Reverté-Relime].

D'Amore, B. (2004), "Il ruolo dell'epistemologia nella formazione degli insegnanti di matematica nella scuola secondaria", *La matematica e la sua didattica*, vol. 18, núm. 4, pp. 4-30.

——— (2005), "La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*)", *Uno*, núm. 38, pp. 83-99. [En inglés: D'Amore, B. (2005), "Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya)", *For the learning of mathematics*, vol. 25, núm. 2, pp. 26-32. En italiano: D'Amore, B. (2005), "L'argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya)", *La matematica e la sua didattica*, vol. 19, núm. 4, pp. 481-500].

——— (2006), "Didattica della matematica 'C'", en S. Sbaragli (ed.) (2006), *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*, Actas del Congreso Internacional homónimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 de septiembre de 2006, Roma, Carocci, pp. 93-96.

——— (2014), *Il problema di matematica nella pratica didattica*, Modena, Digital Index.

D'Amore, B. y M. I. Fandiño Pinilla (2002), "Un acercamiento analítico al triángulo de la didáctica", *Educación Matemática*, vol. 14, núm. 1, pp. 48-62.

——— (2003), "Le due facce del laboratorio. Laboratori di recupero e sviluppo", *La vita scolastica. Dossier*, núm. 1, pp. 4-8.

——— (2007), "Leonhard Euler, maestro di epistemologia e linguaggio", *Bollettino dei docenti di matematica*, núm. 55, pp. 9-14.

D'Amore, B., M. I. Fandiño Pinilla, I. Marazzani y B. Sarrazy (2010), *Didattica della matematica. Alcuni effetti del "contratto"*, Prefacio y posfacio de Guy Brousseau, Bolonia, Archetipolibri.

D'Amore, B., M. I. Fandiño Pinilla, I. Marazzani y S. Sbaragli (2008), *La didattica e le difficoltà in matemática*, Trento, Erickson.

D'Amore, B. y L. Giovannoni (1997), "Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico. Un'esperienza didattica nella scuola media", *La matematica e la sua didattica*, vol. 11, núm. 4, pp. 360-399.

D'Amore, B., D. J. Godino y M. I. Fandiño Pinilla (2008), *Competencias y matemática*, Bogotá, Magisterio.

D'Amore, B. e I. Marazzani (eds.) (2005), *Laboratorio di matematica nella scuola primaria. Attività per creare competenze*, Bolonia, Pitagora.

——— (2008), "L'angolo, oggetto matematico e modello spontaneo", *La matematica e la sua didattica*, vol. 22, núm. 3, pp. 285-329.

——— (2011), "Problemi e laboratori. Metodologie per l'apprendimento della matemática", *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*, vol. 4, Bolonia, Pitagora.

D'Amore, B. y M. Matteuzzi (1975), *Dal numero alla struttura*, Bolonia, Zanichelli.

D'Amore, B. y S. Sbaragli (2011), *Principi di base della didattica della matematica*. Proyecto: *Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere*, vol. 2, Bolonia, Pitagora.

D'Amore, B. y F. Speranza (eds.) (1989), *Lo sviluppo storico della matematica - Spunti didattici*, vol. I, Roma, Armando.

——— (eds.) (1992), *Lo sviluppo storico della matematica-Spunti didattici*, vol. II, Roma, Armando.

——— (eds.) (1995), *La matematica e la sua storia. Alcuni esempi per spunti didattici*, Milán, Angeli.

D'Amore, B., L. Radford y G. T. Bagni (2006), "Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 29B, núm. 1, pp. 11-40.

Davis, Z. (1992), "Alternative mathematics materials: Panacea or obstacle?", en C. Breen y J. Coombe (eds.), *Transformations: The first years of the Mathematics Education Project*, Ciudad del Cabo (SA), Mathematics Education Project, pp. 18-37.

De Bartolomeis, F. (1978), *Sistema dei laboratori per una scuola nuova necessaria e possibile*, Milán, Feltrinelli.

Dienes, Z. P. (1966), *Construction des mathématiques*, París, Presses Universitaires de France.

——— (1972), *La mathématique vivante*, París, OCDL.

Duval, R. (1995a), *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berna, Peter Lang.

——— (1995b), "Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?", *Actes de l'École d'été* 1995.

Elia, I. (2011), "Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs", *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Irem de Estrasburgo, vol. 16, pp. 45-66.

Fandiño Pinilla, M. I. (2001), "La formazione degli insegnanti di matematica: una cornice teorica di riferimento", *La matematica e la sua didattica*, vol. 15, núm. 4, pp. 352-373.

——— (2003), "'Diventare competente', una sfida con radici antropologiche", *La matematica e la sua didattica*, vol. 17, núm. 3, pp. 260-280.

——— (2006), *Currículo, evaluación y formación docente en matemática*, Bogotá, Magisterio.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008), *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*, Prólogo de Giorgio Bolondi, Bogotá, Magisterio.

——— (2010), *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática,* Prólogo de Giorgio Bolondi, Bogotá, Magisterio.

Fauvel, J. y J. A. van Maanen (eds.) (2000), *History in Mathematics Education. An ICMI study*, Dordrecht, Kluwer.

Fischbein, E. (1985a), "Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari", en L. Chini Artusi (ed.) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 122-132.

——— (1985b), "Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matemática", en L. Chini Artusi (ed.) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 8-19.

Fischbein, E. y G. Vergnaud (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, (ed. Bruno D'Amore), Bolonia, Pitagora.

Frabboni, F. (2004), *Il laboratorio*, Roma y Bari, Laterza.

Frank, M. L. (1985), "What myths about mathematics are held and conveyed by teachers?", *Arithmetic Teacher*, núm. 37, pp. 10-12.

Freitas, J. L. M. y V. Rezende (2013), "Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica", *RPEM, Revista Paranaense de Educação Matemática*, vol. 2, núm. 3, pp. 10-34.

Glaeser, G. (1975), *La matematica moderna per chi deve insegnare,* Milán, Feltrinelli.

Gagatsis, A., M. Shiakalli y A. Panaoura (2003), "La droite arithmétique comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers", *Annales de didactique et de sciences cognitives*, núm. 8, pp. 95-112.

Hilbert, D. (1899), "Grundlagen der Geometrie", en AA. VV. (1899), *Festschrift zur Feier der Entüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen*, Leipzig, Teubner, pp. 1-92.

Kimmel, H., y F. Deek (1996), "Instructional technology: A tool or a panacea?", *Journal of Science Education and Technology*, vol. 5, núm. 1, pp. 87-91. Doi: 10.1007/BF01575474.

Kister, P. y J. Navarro (1973), *La nueva matemática*, Barcelona, Salvat.

Kleinmuntz, B. (ed.) (1976), *Problem solving. Ricerche, metodi, teoria,* Roma, Armando.

Kline, M. (1973), *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*, Nueva York, St. Martin's Press.

Lave, J. y E. Wenger (1990), *Situated Learning: Legitimate Periperal Participation*, Cambridge, Cambridge University Press.

Leder, G. C., E. Pehkonen y G. Törner (eds.) (2002), *Beliefs: A hidden variable* *on mathematics education?* Dordrecht, Boston y Londres, Kluwer Academic Press, pp. 177-194.

Lederman, N. G. y S. K. Abell (eds.) (2007), *Handbook of Research on Science Education*, Routledge (NJ), Lawrence Erlbaum Associates.

Locatello S., G. Meloni y S. Sbaragli (2008), "Soli, muretti, regoli e coppie ... Riflessioni sull'uso acritico dei regoli Cuisenaire-Gattegno: i numeri in colore", *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 31A, núm. 5, pp. 455-483.

Marazzani, I. (ed.) (2007), *I numeri grandi*, Trento, Erickson.

Mashaal, M. (2006), *Bourbaki: A Secret Society of Mathematicians*, Providence (RI), American Mathematical Society.

Moser, J. M. (1985a), "Alcuni aspetti delle più recenti ricerche sull'apprendimento dei concetti e delle abilità fondamentali della addizione e della sottrazione", en L. Chini Artusi (ed.) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 46-60.

——— (1985b), "Analisi delle strategie di risoluzione dei problemi verbali", en L. Chini Artusi (ed.) (1985), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Bolonia, Zanichelli-UMI, pp. 61-85.

Nuffield Project (1972), *Computers and young children*, Veaving Guides, núm. 4, Londres, Nuffield Foundation.

Papert, S. (1980), *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*, Nueva York, Basic Books.

Pehkonen, E. (1994), "On Teachers' Beliefs and Changing Mathematics Teaching", *Journal für Mathematik-Didaktik*, vol. 15, núms. 3-4, pp. 177-209.

Pehkonen, E. y G. Törner (1996), "Introduction to the theme: Mathematical beliefs", *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, núm. 28, pp. 99-100.

Phillips, C. J. (2014), *The New Math: A Political History*, Chicago, University of Chicago Press.

Powers, K. D. y D. T. Powers (1999), "Making sense of teaching methods in computing education", en AA. VV. (1999), *Actas del Congreso Frontiers in Education Conference*, San Juan, Puerto Rico, vol. 1, núm. 11B3, pp. 30-35. Doi:10.1109/FIE.1999.839224.

Resnick, L. B. y W. W. Ford (1981), *The psychology of mathematics for instruction*, Hillsdale (NJ), L.E.A.

Schoenfeld, A. H. (1983), "Beyond the purely cognitive: beliefs systems, social cognitions and metacognitions as driving forces in intellectual performance", *Cognitive Science*, vol. 7, núm. 4, pp. 329-363.

Scott, P. B. (1983), "A Survey of Perceived Use of Mathematics Materials by Elementary Teachers in a Large Urban School District", *School Science and Mathematics*, vol. 83, núm. 1, pp. 61-68. Doi: 10.1111/j.1949-8594.1983.tb10091.x.

Treagust, D. F. (2007), "General instructional methods and strategies", en N. G. Lederman y S. K. Abell (eds.) (2007), *Handbook of Research on Science Education*, Routledge (NJ), Lawrence Erlbaum Associates, vol. 1, pp. 373-391.

Vergnaud, G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berna, Peter Lang.

——— (1982), "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems", en T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (eds.) (1982), *Addition and subtraction*, Hillsdale, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 39-59.

——— (1983), "Multiplicative structures", en R. Lesh e I. Landau (eds.) (1983), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Nueva York y Londres, Academic Press, pp. 127-174.

Yourdon, E. y L. Constantine (1979), *Structured Design: Fundamentals of a Discipline of Computer Program and System Design,* Saddle River (NJ), Prentice-Hall.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este artículo deseamos agradecer a los tres revisores anónimos que generosamente contribuyeron, con comentarios y sugerencias, a pasar de una versión anterior a la actual. Un agradecimiento especial para los amigos y colegas Salvador Llinares y Alicia Ávila, a quienes les pedimos asesoría en la preparación de esta versión.

DATOS DE LOS AUTORES

Bruno D'Amore
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
bruno.damore@unibo.it

Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
bruno.damore@unibo.it

www.incontriconlamatematica.net/sitoufficialebm/index.php
www.dm.unibo.it/rsddm
NRME Network of Research in Mathematics Education: www.nrme.org/

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria

Samantha Quiroz Rivera y Ruth Rodríguez Gallegos

Resumen: El presente estudio tiene como objetivo analizar las praxeologías de modelación matemática que existen en los libros de texto de matemáticas para los alumnos de educación primaria en México. Con base en una metodología cualitativa, se realiza una descripción detallada de los géneros de tareas de modelación matemática presentes en las lecciones de los libros elegidos. Con base en ellos, se ponen en consideración las diferentes técnicas, tecnologías y teorías que las acompañan, utilizando para ello el marco teórico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Los resultados obtenidos presentan aportes para la descripción del ciclo de modelación matemática mediante sus diversos elementos praxeológicos. Además, se describe a manera diagnóstica un detallado informe sobre los materiales que la Secretaría de Educación Pública pone a disposición de los alumnos y la poca concordancia de estos con los objetivos que se plantean en los planes de estudio actuales.

Palabras clave: modelación matemática, Teoría Antropológica de lo Didáctico, praxeologías, educación primaria, libros de texto.

Praxeologies analysis of mathematical modeling in textbooks of primary education

Abstract: The present study aims to analyze the mathematical modeling praxeology of the mathematics textbooks for primary school students in Mexico. Based on a qualitative methodology, a detailed description of the types of mathematical modeling tasks present in the lessons of the books chosen are performed. Based on them, there are put into consideration the techniques, technologies and theories using the theoretical framework of the Anthropological Theory of Didactics.

Fecha de recepción: 20 de enero de 2015; fecha de aprobación: 4 de noviembre de 2015.

The results contribute a description of the mathematical modeling cycle through its praxeological elements. It is also described, in a diagnostic way, a detailed report about the materials that the Secretary of Education makes to students and the poor agreement of these with the objectives proposed in the actual curriculum.

Keywords: mathematical modeling, Anthropological Theory of Didactics, praxeologies, elementary school, textbooks.

INTRODUCCIÓN

Múltiples investigaciones coinciden al estipular que el problema en el aprendizaje de las matemáticas deriva de la incapacidad de la escuela para establecer un puente entre el conocimiento formal que desea transmitir y el conocimiento práctico al cual se enfrenta el alumno (Brousseau, 1999; Niss, Blum y Galbraith, 2007; Santos, 1997). En México, esta problemática se refleja en los bajos puntajes obtenidos en evaluaciones nacionales e internacionales en la asignatura de matemáticas. La Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) posiciona a nuestro país en el último lugar en la asignatura de matemáticas de entre los miembros de esta organización (OCDE, 2010). En el ámbito nacional, la Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE) ubica a más de 50% de los alumnos en los niveles elementales o insuficientes en dicha asignatura (SEP, 2013).

La brecha que existe sólo puede ser superada por una enseñanza que promueva la construcción de conocimientos matemáticos mediante su uso en contextos reales, dejando de lado el carácter únicamente formal que predomina en las escuelas (INEGI, 2010). Sin embargo, las estrategias utilizadas actualmente por los docentes en las aulas de clase poco tienen que ver con ello. Los estudios siguen indicando lo que hace más de una década mostraban Carraher, Carraher y Schliemann (2002): para un alumno, un uso eficiente de las matemáticas en las prácticas cotidianas no asegura el éxito en las matemáticas formales de un aula.

Dentro de los esfuerzos para contrarrestar lo anterior, hace aproximadamente 40 años entra en el debate de la investigación educativa la modelación matemática, descrita como aquella herramienta que tiene como objetivo principal el unir la realidad de los alumnos con las matemáticas escolares. Cada año se suman más aportes científicos hacia esta temática, que buscan complementar una definición más acertada, así como mostrar su eficiencia en las aulas de diversos países.

En el currículo mexicano, a partir del inicio de la Reforma Integral de Educación Básica (RIEB) en 2011, se reconoce la importancia de una matemática donde el aprendizaje de algoritmos sólo es importante en la medida en que se puedan utilizar para la resolución de problemas en contextos cotidianos. La Secretaría de Educación Pública (SEP) propone un nuevo plan de estudios en donde incluye el aprendizaje de cuatro competencias en la asignatura de matemáticas,[1] libros de apoyo para los maestros con sugerencias didácticas, así como libros de matemáticas gratuitos para los alumnos de primero a sexto grado.

El programa de estudios de matemáticas establece como objetivo fundamental lograr que los alumnos "tengan oportunidades de modelizar situaciones y resolverlas, es decir, expresarlas en un lenguaje matemático, efectuar los cálculos necesarios y obtener un resultado que cumpla con las condiciones establecidas" (SEP, 2011a). Sin embargo, la inclusión de dicho objetivo no parece haber logrado mejoras en los resultados obtenidos. Surgen entonces cuestionamientos sobre la eficacia de las escuelas para implementar la modelación matemática, sobre los materiales que brinda la SEP a los maestros, sobre la verdadera promoción de las matemáticas como herramientas funcionales en diversos contextos y, más aún, sobre la preparación del docente para aplicar la modelación matemática.

Por lo anterior descrito, la tesis doctoral que sustenta la presente investigación tiene como propósitos reconocer la manera en que la modelación matemática *vive*[2] en los libros de texto de matemática de la escuela primaria, así como la manera en que estos son usados por los docentes. En el presente artículo se aborda el primer elemento cuestionable, siendo nuestra pregunta de investigación: ¿De qué manera vive la modelación matemática en los libros de texto de matemáticas de la educación primaria en México?

A continuación, se presenta, primeramente, el marco teórico que brinda soporte al estudio, posteriormente se describe la propuesta metodológica y, por último, se muestran los resultados encontrados a partir de la recolección de datos. Se agrega una sección de conclusiones y reflexiones en torno a la temática analizada, así como las implicaciones que resultan para la continuación del estudio doctoral.

[1] Las cuatro competencias son: competencia para resolver problemas de manera autónoma; competencia para comunicar información matemática; competencia para valorar procedimientos y resultados, y competencia para manejar técnicas eficientemente (SEP, 2011a).

[2] Utilizamos el término "vivir", porque reconocemos que los objetos de enseñanza están vivos y son susceptibles de transformarse mediante la interacción con otros objetos. Esta acepción se basa en la Teoría de Ecología de Saberes propuesta por Chevallard (1992).

MARCO TEÓRICO

La modelación matemática en el ámbito escolar tiene su génesis en el deseo de lograr la formación de alumnos capaces de aplicar las matemáticas y transferir los conocimientos en una variedad de contextos y situaciones fuera de la escuela (Alsina, 2007; Confrey, 2007). De acuerdo con Kaiser y Sriraman (2006), no existe una comprensión homogénea para definir la modelación matemática y su epistemología, por lo que es necesario la descripción de la perspectiva desde la cual analizamos este proceso. En nuestra investigación reconocemos la modelación matemática desde una perspectiva educacional, porque reconocemos su importancia en la estructuración de procesos de aprendizaje, asumiendo el papel de estrategia didáctica.

Si bien no existe una manera única para describir la modelación matemática (Cordero y otros, 2009), los aportes encontrados en la literatura revisada permiten la elaboración de una definición bastante completa del término. En un primer momento, tomamos como base la definición de Trigueros (2006), quien define la modelación matemática como el proceso cíclico que consiste en proporcionar problemas abiertos y complejos en los que se puedan poner en juego conocimientos previos y habilidades creativas para sugerir hipótesis y plantear modelos que expliquen el comportamiento del fenómeno en términos matemáticos.

La propuesta de esquemas para representar el proceso de modelación muestra la gran diversidad de perspectivas desde las cuales se ha mirado su ciclo. Destaca, entre ellas, el primer modelo elaborado por Pollak (1969), quien reconoce por primera vez la presencia de dos grandes mundos: el extra matemático y el de las matemáticas escolares, así como el tránsito entre ellos. En dicho esquema, se prioriza la realización de actividades aplicadas como parte de la experiencia del aula. Más adelante, Alsina (1998), Blomhøj y Jensen (2003), Blum y Borromeo (2006), Maaß (2005), Lesh y Yoon (2007), entre otros investigadores, muestran la identificación de un mayor número de detalles traducidos en una serie de etapas que describen la modelación matemática.

La presente investigación toma como base el esquema de modelación matemática propuesto por Rodríguez (2007, 2010) (véase la figura 1). Dicha decisión se funda en dos razones principales. La primera de ellas estriba en el origen de las ocho etapas propuestas por la autora, que consistió en la identificación de praxeologías asociadas a la modelación matemática basándose en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard (1990). Esta razón per-

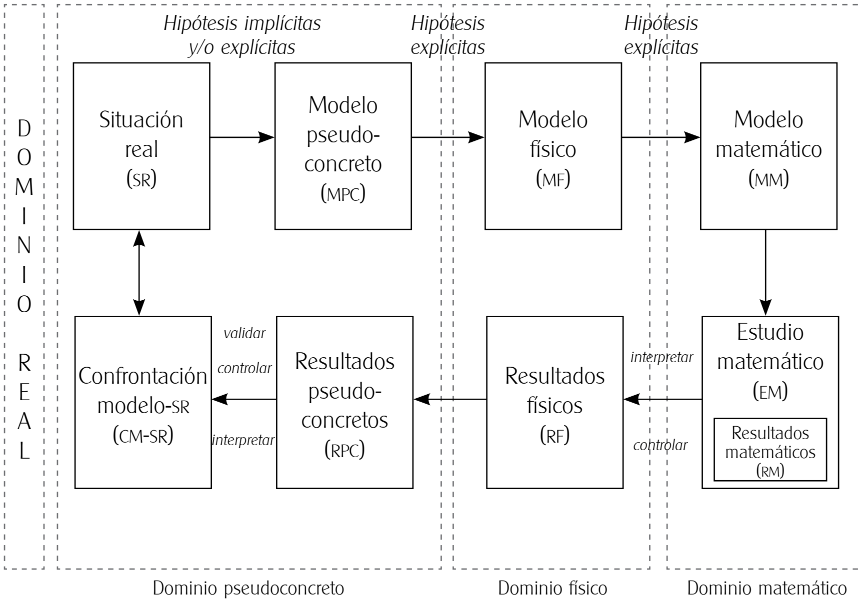


Figura 1. Esquema de modelación de Rodríguez (2007, 2010)

mite que el presente estudio brinde un soporte respecto a las tareas asociadas a cada elemento del ciclo de modelación y utilice dicha información para su posterior análisis.

Por otro lado, el esquema de modelación presentado por Rodríguez (2007, 2010) incorpora un aspecto fundamental para la comprensión del propio proceso de modelación: el dominio *pseudoconcreto*. La incorporación de un dominio *pseudoconcreto* se justifica en un análisis que reconoce la presencia de una *transposición* de los saberes escolares. La Teoría de la Transposición Didáctica (TTD), desarrollada por Chevallard (1985), retoma el término acuñado por el sociólogo Verret (1975), que argumenta que toda práctica de enseñanza de un objeto presupone la transformación previa de este en un objeto de enseñanza y denomina esta transformación como *transposición didáctica*. Así, el saber sabio construido en la *noosfera* pasa por ciertos mecanismos para asegurar su inserción en el discurso educativo, otorgándole el nombre de saber por enseñar. El saber por enseñar, a su vez, se presenta como cerrado y fragmentado en los libros de texto y, cuando es convertido en un objeto de enseñanza por los docentes, se vuelve a nombrar como saber enseñado.

Problema real	Problema *pseudoconcreto*
Queremos conocer el perímetro de la escuela primaria (Tiene una forma rectangular). Sal con tus compañeros a medir el patio y calcula el perímetro del plantel educativo.	La superficie del terreno de la escuela de María tiene forma de rectángulo con unas medidas de 20 metros de largo y 15 de ancho, ¿cuál es el perímetro de la escuela de María?

Figura 2. Problema real y problema *pseudoconcreto*

En el marco de la TTD, en el dominio *pseudoconcreto* se ubican todos aquellos problemas basados en un contexto de la realidad, pero cuyos datos han sido modificados para lograr el cumplimiento de ciertos objetivos didácticos particulares de los cursos de matemáticas, es decir, donde existe una transposición didáctica (Rodríguez, 2007, 2010). A manera de ejemplo, la figura 2 muestra un problema basado en una situación real y un problema basado en una situación *pseudoconcreta*.

Otra incorporación del ciclo presentado por Rodríguez (2007, 2010) es la presencia de un dominio físico, debido a que su realización estuvo basada en el trabajo con ecuaciones diferenciales en contextos físicos. Sin embargo, para motivos de la presente investigación, este apartado será utilizado para su análisis por la propia naturaleza del contenido matemático que se abordará.

Modelación desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)

La TAD se ocupa del estudio de pares de Organizaciones Matemáticas y Didácticas (OM, OD). De acuerdo con Chevallard (1985), una OM está compuesta por varios tipos de tareas matemáticas cuya realización requiere técnicas matemáticas que, a su vez, se justifican en tecnologías y teorías matemáticas específicas. Una OD se refiere a la manera de organizar el estudio matemático que se lleva a cabo en una institución, y su estudio resulta más complejo que el de las OM (Ruiz-Higueras y García, 2011).

Por medio de la TAD, podemos caracterizar la modelación en términos de praxeologías y las relaciones entre dichas praxeologías (Chevallard, 1985; García, Gascón, Ruiz-Higueras y Bosch, 2006). Más detalladamente y basados en los estudios de García (2005) y Barquero, Bosch y Gascón (2011), ubicamos la modelación matemática como procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas y didácticas de complejidad creciente.

La noción de praxeología se integra con cuatro principales elementos en dos bloques. El primero es el bloque técnico-práctico, relativo al saber-hacer y que está compuesto por una tarea [*t*], se expresa con cualquier verbo y forma parte de un tipo de tareas y una técnica [τ] que representa una determinada manera de realizar un tipo de tareas. El segundo bloque se denomina tecnológico-teórico y engloba una tecnología [θ] que justifica racionalmente la técnica; y una teoría [Θ] definida como enunciados abstractos que justifican el discurso tecnológico. La totalidad de [T, τ, θ, Θ] conforma una *praxeología puntual*, es decir, es relativa a un único tipo de tareas [T] (Chevallard, 1999).

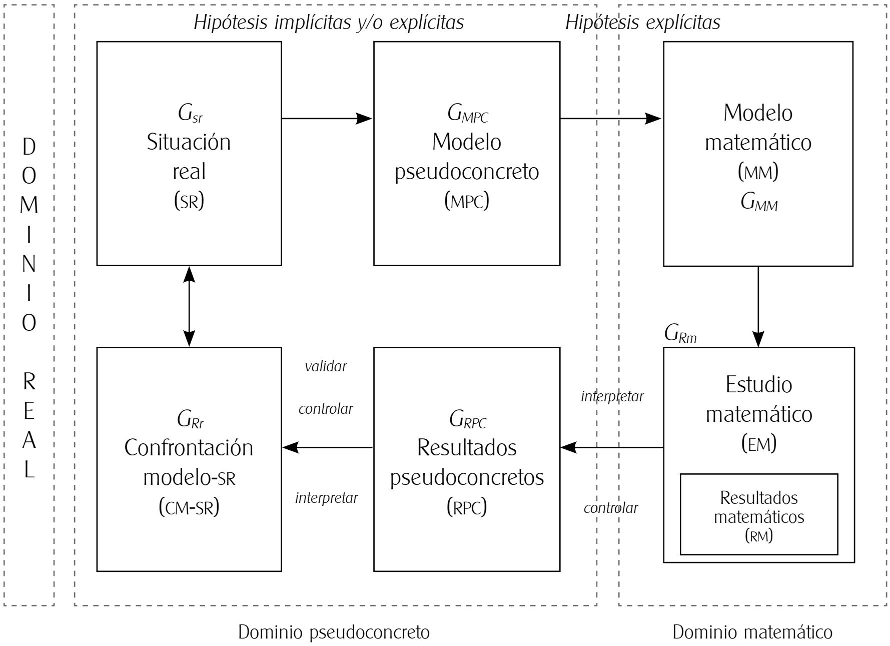
Un término más es el de género de tareas, definido como el conjunto de tareas cuyo contenido está estrechamente especificado. Por ejemplo, calcular es un género de tareas, pero calcular el valor de una expresión numérica es un tipo de tareas (Chevallard, 1999; Corica y Otero, 2009).

Los elementos mencionados conforman una herramienta que sustenta análisis de prácticas que van desde las referidas a la acción del profesor hasta las establecidas en los libros de texto escolares. La importancia de realizar análisis praxeológicos a libros de texto se justifica al definirlos como una traducción de una dirección institucional en forma de un programa que está hecho de acuerdo con la interpretación de los autores, es decir, resultado de una transposición didáctica (Chevallard, 1992).

En la revisión literaria se encontraron diversas investigaciones que han realizado análisis praxeológicos a libros de texto (Chaachoua, 2009; Guyon, 2008; Rodríguez, 2007, y Saglam, 2004). Los análisis consistentes en la búsqueda de los cuatro elementos de una praxeología han servido para llegar a conclusiones respecto a diferencias entre saberes por enseñar entre diversas instituciones (Chaachoua, 2009), o el mejor entendimiento del abandono de cierta estrategia didáctica por parte de los docentes (Saglam, 2004).

Propuesta para el análisis de praxeologías de modelación matemática

La propuesta que se presenta a continuación se basa en el estudio de Rodríguez (2007, 2010) y pretende detallar algunos elementos teóricos que la conforman. De acuerdo con dicho estudio, el proceso de modelación matemática se puede realizar a través de la identificación de diversas praxeologías, donde al menos exista una por cada una de las etapas de este. El análisis de libros presentado por Rodríguez (2007) identificó seis géneros de tareas asociadas que se pre-



Géneros de tareas:

1. Plantear a los alumnos problemas en situaciones reales [G_{SR}]
2. Plantear a los alumnos problemas en situaciones pseudoconcretas [G_{MPC}]
3. Buscar que los alumnos elaboren un modelo matemático [G_{MM}]
4. Proponer a los alumnos el trabajo con el modelo matemático [G_{RM}]
5. Pedir a los alumnos que analicen resultados matemáticos en situaciones pseudoconcretas [G_{RPC}]
6. Pedir a los alumnos que analicen resultados matemáticos en situaciones reales [G_{RR}]

Figura 3. Géneros de tareas acordes al proceso de modelación

sentan en la figura 3.[3] Es necesario reconocer que los géneros de tareas deben ser analizados desde el punto de vista del docente y/o los libros de textos. Así, por ejemplo, es el docente o el libro quien plantea a los alumnos problemas en

[3] Se decidió acotar las etapas establecidas en el contexto de la educación primaria, donde se prescindió de las dos etapas referidas al dominio físico, al no ser un dominio muy recurrente en este nivel educativo.

situaciones reales [G_{SR}] y son estos mismos quienes les proponen trabajar con modelos matemáticos [G_{RM}].

Se reconocen como géneros de tareas puesto que no muestran un contenido específico, es decir, se proponen como tareas de manera general. Por ejemplo, para el género de tarea "Plantear a los alumnos problemas en situaciones reales", un tipo de tarea específico podría ser: "Plantear a los alumnos un problema de suma de fracciones con diferente denominador en un contexto de fútbol".

Con el fin de describir los géneros de tareas presentados, en el cuadro 1 se muestran algunos fragmentos de libros de texto que incluían dichos géneros de tarea.

Identificar cuáles géneros de tareas están presentes en los libros de texto permitirá conocer si efectivamente el proceso de modelación está inmerso en dichos materiales. Esta labor será realizada en la totalidad de las lecciones de seis libros de texto. Posteriormente y con el motivo de detallar el estudio, se elegirá la lección que más géneros de tarea de modelación matemática posea. A partir de esta especificación, se completará el estudio de los otros elementos de las praxeologías, a saber, las técnicas mediante las cuales se realizan las tareas descritas para luego indagar las tecnologías y teorías que las justifican. En el siguiente apartado se describirá el diseño de investigación que guiará la recolección y análisis de los datos.

METODOLOGÍA

La metodología del presente estudio es de tipo cualitativo, ya que pretende comprender los significados e interpretar prácticas en ambientes naturales desde el punto de vista de quienes la experimentan (Hernández, Baptista y Fernández, 2010). El carácter de la investigación es de tipo descriptivo (Creswell, 2007).

La pregunta de investigación planteada fue: ¿De qué manera vive la modelación matemática en los libros de texto de matemáticas de la educación primaria en México? En total concordancia con el marco teórico presentado en la sección anterior, se eligieron las unidades de análisis que dieran pie a la producción y análisis de los datos; en este caso, dichas unidades corresponden con los diferentes elementos de una praxeología y también con los seis géneros de tarea identificados. Las unidades de análisis, a su vez, estuvieron en concordancia con los objetivos específicos que llevarían a dar respuesta a la pregunta de investigación.

Cuadro 1. Géneros de modelación matemática

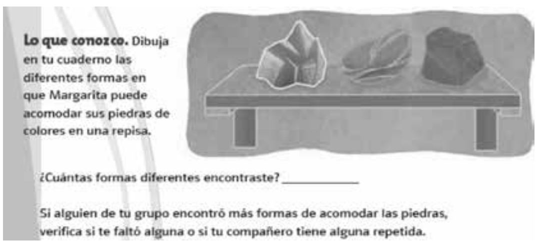
<table>
<tr><th>Géneros de tarea</th><th>Descripción</th><th></th></tr>
<tr><td>G_{SR}</td><td>Tareas que plantean un problema basado en una situación real</td><td>2. Formen 6 equipos, cada uno lance 50 veces un dado y registre los resultados obtenidos en la tabla siguiente.

<table><tr><th rowspan="2">Equipo</th><th colspan="6">Cantidad de veces que cayó</th></tr><tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr><tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>6</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Total</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>
(El ejemplo muestra el planteamiento de una problemática asociada a la probabilidad después de haber hecho un experimento donde el alumno recolectara datos para su estudio.)</td></tr>
<tr><td>G_{MPC}</td><td>Tareas que plantean un problema basado en una situación pseudoconcreta</td><td>Los desechos orgánicos que un camión recolectó el lunes fueron vaciados en contenedores metálicos de 660 L cada uno.

• El martes se llenaron 9 contenedores y se colocaron 80 L de desechos en un décimo contenedor, ¿cuántos litros de desechos recolectó el camión en total? ______________________________

(El ejemplo muestra el planteamiento de una situación en términos pseudoconcretos para el alumno.)</td></tr>
</table>

Cuadro 1. Géneros de modelación matemática (continuación)

Géneros de tarea	Descripción	
G_{MM}	Tareas que planteen actividades donde los alumnos deban conocer, elaborar o identificar un modelo matemático para la resolución de un problema	• En grupo propongan una fórmula que les permita calcular el volumen de un prisma rectangular y escríbanla: *(El ejemplo busca proponer a los alumnos que elaboren un modelo matemático que dará resolución a un problema planteado anteriormente.)*
G_{RM}	Tareas donde se le pide al alumno que trabaje con un modelo matemático, ya sea creado o dado por el docente	5. En parejas, escriban fracciones equivalentes en las líneas. a) $\frac{2}{5} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ b) $\frac{2}{4} = \_\_\_\_ = \_\_\_\_$ *(El único objetivo del ejemplo planteado es la práctica de algoritmos de acuerdo con el contenido matemático estudiado).*
G_{RPC}	Tareas que involucren la discusión y reflexión del resultado matemático obtenido en términos del problema pseudoconcreto planteado	 *(En el ejemplo, se plantea a los alumnos un problema pseudoconcreto. Posterior a ello, se pide discutir y reflexionar sus respuestas en términos del mismo problema pseudoconcreto.)*

Cuadro 1. Géneros de modelación matemática (conclusión)

Géneros de tarea	Descripción	
G_{RR}	Tareas que involucren la discusión y reflexión del resultado matemático obtenido en términos del problema real	• Al lanzar una moneda, ¿qué es más probable obtener, águila o sol? ______________________ • ¿Cómo concuerda su respuesta con los resultados que obtuvieron? ______________________ *(En el ejemplo, en un primer momento se pide a los alumnos lanzar 20 veces una moneda. Una vez hecho esto, se pregunta por la probabilidad de obtener cada resultado. Específicamente la* G_{RR} *se puede observar en la última pregunta donde se discuten dichos resultados con lo obtenido en el experimento con la moneda.)*

Se seleccionaron los libros que consistían en el material vigente utilizado por los docentes de educación primaria de la asignatura de matemáticas. Se analizaron en total seis libros editados por la SEP, uno por cada grado de la educación primaria correspondientes a esta asignatura.

El diseño de la investigación se muestra en la figura 4, donde se define cada fase del estudio. El detalle sobre el proceso de cada fase se encuentra en cada uno de los siguientes apartados.

- Fase I. En un primer momento se seleccionaron los libros de texto.
- Fase II. Se identificaron los contenidos y lecciones de los libros seleccionados.
- Fase III. Se realizó un análisis de los géneros de tareas de modelación matemática que se muestran en cada una de las lecciones.
- Fase IV. Se seleccionó el contenido matemático que incluye más géneros de tareas de modelación matemática.
- Fase V. Se complementó la búsqueda de técnicas, tecnologías y teorías para las tareas encontradas en el contenido seleccionado.

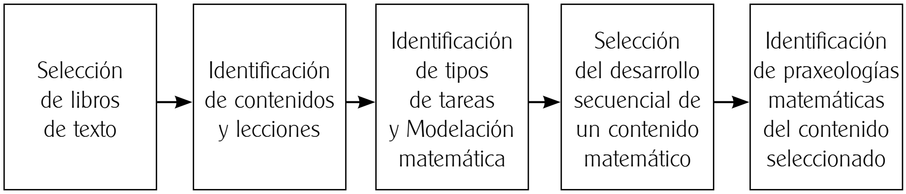


Figura 4. Diseño de investigación fase I

Para la recolección de los datos se utilizó la técnica del análisis de documentos. Se diseñaron y completaron rejillas de recolección de información con el propósito de configurar cada una de las categorías del estudio para su posterior análisis. El análisis buscó examinar, categorizar, tabular, evaluar y recombinar evidencia, siempre guiados por las proposiciones iniciales del estudio (Yin, 2003). La validez estuvo determinada por medio de juicio de expertos, ya que los resultados encontrados en cada material analizado fueron comparados con expertos en la Didáctica de las Matemáticas que apoyaron el estudio.

RESULTADOS

Los resultados del estudio se presentan de acuerdo con las fases presentadas en el diseño de investigación. En algunas de ellas se despliegan conclusiones específicas que surgen en la propia descripción y que son necesarias para la continuación de las fases sucesoras.

Fase 1. Selección de libros de texto

En México, las escuelas primarias públicas del país, que reciben a la gran mayoría de los alumnos, trabajan conforme al reglamento general que estipula la SEP. Dicha Secretaría es la encargada de decidir los programas que guían los contenidos que van a ser enseñados en cada grado escolar y en cada asignatura.

La SEP además proporciona de manera gratuita libros de texto a través de la Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos (Conaliteg) a los más de 18.7 millones de alumnos que se inscriben en los niveles básicos (INEGI, 2010). De esta manera, los libros que se seleccionan para la realización del análisis praxeológico son precisamente los libros otorgados por la Conaliteg, específicamente, los seis referentes a la asignatura de matemáticas:

- SEP (2011c), *Matemáticas, Primer grado* (2ª. ed., p. 173), Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.
- SEP (2011d), *Matemáticas, Segundo grado* (2ª. ed., p. 189), Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.
- SEP (2011e), *Matemáticas, Tercer grado* (2ª. ed., p. 181), Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.
- SEP (2011f), *Matemáticas, Cuarto grado* (2ª. ed., p. 185), Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.
- SEP (2011g), *Matemáticas, Quinto grado* (2ª. ed., p. 190), Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.
- SEP (2011h), *Matemáticas, Sexto grado* (2ª. ed., p. 194), Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

La edición de los libros con los que se trabaja es la segunda, del año 2011, y con reimpresión en el año 2012, ciclo en el cual están vigentes dichos materiales.

Fase II. Identificación de contenidos y lecciones

En un primero momento clasificamos los contenidos matemáticos por enseñar de acuerdo con las lecciones de cada libro de texto. Identificamos cinco bloques por libro y un promedio de 10 lecciones por bloque. Es importante aclarar que tomamos la decisión de retomar los contenidos matemáticos a partir de la información de los libros de texto de los alumnos.

El motivo de tal decisión estriba en que el plan de estudios de la Educación Primaria ha tenido mayor número de ediciones que los libros de texto de los alumnos, lo que ha hecho que exista una gran disparidad entre los contenidos matemáticos de ambos documentos. A pesar de los esfuerzos por relacionar ambos materiales, encontramos profundas diferencias entre ellos, entre las que destaca la ausencia de contenidos matemáticos en el plan de estudios a los que se hace referencia en los libros de texto del alumno, así como diferencias en su calendarización.

En el cuadro 2 se muestra un ejemplo de la categorización realizada para los contenidos matemáticos del primer bloque del libro de matemáticas de primer grado.

Cuadro 2. Contenidos y lecciones del bloque I, Primer grado

	Lección	Contenido	Tarea
Bloque I	1. Los números de mi alrededor	Números en precios de artículos, calendarios, autobuses, etcétera	• Identificar números en contextos cotidianos
	2. Comparo y completo colecciones	Trabajo con colecciones (comparar y completar)	• Contar colecciones • Comparar colecciones
	3. ¿Agrego o quito elementos?	Trabajo con colecciones (quitar elementos)	• Comparar colecciones • Agregar elementos • Quitar elementos
	4. Números en orden ascendente y descendente	Sucesión numérica de 1 en 1 a partir de cualquier número	• Enuncien sucesión numérica
	5. Escribo números del 1 al 10	Números por lo menos hasta el 10	• Escribir número del 1 al 10
	6. ¿Tienen las mismas características?	Cuerpos y sus características	• Agrupar objetos con iguales características
	7. Semejanzas y diferencias entre las figuras	Igualdades y diferencias en figuras compuestas	• Identifica triángulos, cuadrados y rectángulos
	8. Imito posiciones	Posición (personas u objetos)	• Imita posiciones • Diferencia derecha e izquierda
	9. Ubico personajes y objetos	Ubicación de una persona u objeto	• Diferencia arriba, abajo, izquierda, derecha
	10. Reconozco sus características	Características de objetos y colecciones	• Identifica características de objetos
	11. Leo y registro información	Información contenida en imágenes	• Lee información de imágenes • Registra información de imágenes

Fase III. Identificación de géneros de tareas de modelación matemática

Cada lección de los seis libros fue analizada clasificando las actividades propuestas según a qué géneros de tarea de modelación matemática respondían. Así, se organizaron los resultados en cuadros donde se indicaba cuántas y cuáles géneros de tareas de modelación matemática fueron identificadas por lección y por contenido matemático. El cuadro 3 presenta un ejemplo retomado del libro de cuarto grado en el bloque 3.

Después de ser organizados y contabilizados los diversos géneros de tarea en los libros de texto, se llegó a las siguientes conclusiones:

a) La mayoría de las lecciones de los libros de texto de matemáticas proponen géneros de tareas relacionadas con la elaboración y trabajo con modelos matemáticos [G_{MM}, G_{RM}]. Sin embargo, en la mayoría de las lecciones se hace énfasis en modelos ya creados para su uso mediante la forma de algoritmos aislados que el alumno conoce de antemano o es explicado por el docente.

b) En los contenidos que se sustentan en el planteamiento de problemas en contexto (que son una minoría), existe una predominancia de situaciones cuyos datos fueron adaptados a los propósitos perseguidos, es decir, planteados en el dominio pseudoconcreto [G_{MPC}], lo que denota una transposición didáctica del saber. Ello demuestra un intento de la SEP por considerar a la matemática como una herramienta para la resolución de problemas lamentablemente ocurre en muy pocas lecciones.

c) En las lecciones sobre ubicación espacial en los primeros grados, se incluye un mayor número de géneros de tareas basadas en situaciones reales [G_{SR}]; sin embargo, a partir del tercer grado, se plantean solamente géneros de tareas en el dominio del modelo matemático [G_{RM}].

d) Se identificó que la adquisición de nociones de probabilidad y estadística en los libros de texto está altamente relacionada con los seis géneros de tareas [G_{SR}, G_{MPC}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPC}, G_{RR}]. En general, las tareas que se plantean están basadas en situaciones reales donde los alumnos deben realizar experimentos relacionados con el azar y a partir de los datos. Cuando no es posible el trabajo con situaciones reales, se proponen problemas inscritos en una realidad pseudoconcreta.

e) Por lo anterior, concluimos que el contenido matemático con más géneros de tareas es el de probabilidad. Por ello, se retomará el contenido de

Cuadro 3. Contenidos, lecciones y géneros de tarea del bloque 3, Cuarto grado

	Lección	Contenido	Tarea	Género de tarea
Bloque III	23. La recta numérica	Números naturales. Ubicación de números naturales en la recta numérica	• Ubica números en la recta numérica	G_{MM} G_{RM}
	24. Es mayor que $^1/_2$	Números fraccionarios. Compara fracciones e identifica fracciones equivalentes	• Identifica fracciones • Compara fracciones • Ubica fracciones equivalentes	G_{MM} G_{RM}
	25. El doble de una fracción	Números fraccionarios. Determina expresiones equivalentes y calcula el doble, mitad, cuádruplo, triple, etc., de las fracciones más usuales	• Suma fracciones	G_{MM} G_{RM}
	26. ¿Por 2 será el doble?	Multiplicación y división. Determina algunas propiedades de las operaciones de multiplicación y división	• Multiplica cantidades • Divide cantidades	G_{MM} G_{RM} G_{RM} G_{RPC}
	27. Exprésalo de otra manera	Adición y multiplicación. Descomponer un número en adiciones y multiplicaciones	• Suma cantidades • Descompone números	G_{MM} G_{RM}
	28. ¿Qué figura es?	Figuras planas. Determina las características de distintas figuras planas	• Conoce las características de figuras planas • Identifica figuras planas	G_{MM} G_{RM}
	29. Redes para polígonos	Figuras planas. Construye polígonos sobre una red de puntos y elabora redes para construir ciertos polígonos	• Construye figuras planas	G_{MM} G_{RM}
	30. El plano de tu escuela	Representación. Interpreta planos de edificios conocidos	• Interpreta planos	G_{MPC} G_{MM} G_{RM} G_{RPC}
	31. Las siete y sereno	Unidades. Lee y comunica la hora y la información que brinda el calendario	• Lee información del calendario • Lee información del reloj	G_{MPC} G_{MM} G_{RM} G_{RPC}
	32. Anticipa quién ganará	Nociones de probabilidad y diagramas. Anticipa la aparición de un suceso, empleando las tablas de frecuencias	• Resuelve problemas de probabilidad	G_{MPC} G_{MM} G_{RM} G_{RPC}

probabilidad para continuar con el estudio praxeológico, lo que permitirá acotar los resultados del presente estudio.

Fase IV. Desarrollo secuencial del contenido seleccionado

A fin de precisar la secuencia de contenidos relativos a la probabilidad, se consultó el Plan de Estudios de Educación Primaria elaborado por la SEP. Fue sorpresivo descubrir que, en el Programa de Estudios 2011, en ninguno de los seis grados de la educación primaria se contemplan los contenidos relacionados con el desarrollo del concepto de probabilidad. Sin embargo, en los libros de texto de los alumnos existen lecciones que abordan el tema de probabilidad.

El Programa de Estudios 2011 establece la organización de contenidos en tres ejes temáticos: Sentido numérico y pensamiento algebraico, Forma, espacio y medida, y Manejo de la información (SEP, 2011a). En este último eje, se reagruparon los contenidos referidos al área de Estadística, dejándose de lado la noción de probabilidad (SEP, 2011b).

A causa de la contradicción existente entre los libros de texto y los programas oficiales vigentes, se decidió indagar en el Programa de Estudios 2009 (SEP, 2009),[4] con el objetivo de conocer si los contenidos de probabilidad habían sido suprimidos de la educación primaria a partir de la RIEB. Los resultados indican que en el Plan de Estudios 2009 sí se encuentra la probabilidad, como se muestra en el cuadro 4.

Más específicamente, las lecciones de los libros de texto relacionadas con el aprendizaje de la probabilidad se muestran en el cuadro 5.

En el cuadro 6 mostramos la frecuencia con que los géneros de modelación matemática fueron encontrados en cada una de las 11 lecciones señaladas. Es posible apreciar que todas las lecciones proponían actividades basadas en problemas con un contexto. Algunas de las situaciones se basaban en realidades pseudoconcretas, pero la mayoría de ellas (7 de 11) proponían la generación de datos de la realidad del alumno mediante diversos juegos y experimentos.

[4] El Plan de Estudios 2009 guió la realización de los libros de texto edición 2011. Cuando en 2011 se reformuló el plan de estudios, los libros de texto no fueron modificados para lograr una relación con el nuevo currículo.

Cuadro 4. Contenidos referidos a la probabilidad en el Plan de Estudios 2009

Grado	Contenido
1º	Combinaciones posibles en un problema dado.
2º	Objetos de una colección con base en sus atributos (Clasificar, ordenar y describir) Atributos cualitativos en objetos de pequeñas colecciones en representados en tablas
3º	No existe contenido relacionado con la probabilidad.
4º	Eventos con resultados posibles (sin cuantificar la probabilidad), utilizando relaciones tales como: "es más probable que...", "es menos probable que..." Problemas simples que exijan una búsqueda exhaustiva de posibilidades (problemas de conteo).
5º	Elementos del espacio muestral de una experiencia aleatoria.
6º	Combinaciones posibles en un problema dado.

Fase V. Análisis praxeológico del contenido elegido

A continuación, presentamos con mayor detalle el análisis del bloque del saber hacer o práctico-técnico, entrelazado con el bloque relativo al saber, también llamado tecnológico-teórico, específicos de los contenidos de probabilidad.

a) Géneros de tareas que planteaban a los alumnos una situación real [G_{SR}]

Integradas en el primer dominio del esquema de modelación, los géneros de tareas relativas al planteamiento de una situación real se refieren a aquellas actividades donde se presenta una problemática en un contexto real que generalmente implica la búsqueda y recolección de datos a partir de un experimento. Posteriormente, dichos datos debían ser trasladados y trabajados en el dominio matemático.

Con frecuencia, estos géneros de tareas se basaban en juegos o experimentos con monedas o dados donde estaba involucrado el azar. La figura 5 muestra algunos ejemplos de las actividades que involucraban este género de tareas.

Llevar a cabo este género de tareas demandaba a los alumnos dos técnicas específicas relativas a la modelación matemática que se muestran en el cuadro 8.

Cuadro 5. Desarrollo secuencial de los contenidos referidos a probabilidad en educación primaria

Grado	Lección	Contenido	Género de tarea
1º	42. Encuentra todas las combinaciones	Encuentra las combinaciones posibles	G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPC}
2º	32. Multiplicando las comparas	Problemas multiplicativos. Resuelve distintos tipos de problemas de multiplicación	G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPC}
3º	51. Registra el ganador	Nociones de probabilidad. Identifica juegos de azar y registra sus resultados	G_{SR}, G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPG}, G_{RR}
	52. Lanza un dado	Nociones de probabilidad. Elige una opción de acuerdo a resultados posibles en juegos sencillos de azar	G_{SR}, G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPG}, G_{RR}
4º	32. Anticipa quién ganará	Nociones de probabilidad y diagramas-tablas. Anticipa la aparición de un suceso, empleando las tablas de frecuencias	G_{SR}, G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPG}, G_{RR}
	41. Lo más probable es que	Nociones de probabilidad. Compara dos o más eventos a partir de sus resultados posibles usando relaciones como: "es más probable que...", "es menos probable que..."	G_{SR}, G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPG}, G_{RR}
	51. Las combinaciones	Diagramas y tablas. Resuelve problemas simples que exigen una búsqueda exhaustiva de posibilidades (problemas de conteo)	G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPC}
5º	34. Una muestra de los resultados	Nociones de probabilidad. Identifica los elementos de un experimento aleatorio	G_{SR}, G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPG}, G_{RR}
6º	33. El orden es importante	Resuelve problemas de conteo que involucren permutaciones sin repetición	G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPC}
6º	37. ¿Qué es más probable?	Identifica los posibles resultados de una experiencia aleatoria	G_{SR}, G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPG}, G_{RR}
	45. Más experimentos de probabilidad	Compara la probabilidad teórica con la frecuencial	G_{SR}, G_{MPG}, G_{MM}, G_{RM}, G_{RPG}, G_{RR}

Cuadro 6. Frecuencia de géneros de tarea en las lecciones de probabilidad

Total de lecciones	Lecciones donde se presentan G_{SR}	Lecciones donde se presentan G_{MPC}	Lecciones donde se presentan G_{MM}	Lecciones donde se presentan G_{RM}	Lecciones donde se presentan G_{RM}	Lecciones donde se presentan G_{RR}
11	7	11	11	11	11	7

2. Formen 6 equipos, cada uno lance 50 veces un dado y registre los resultados obtenidos en la tabla siguiente.

Equipo						
	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						
Total						

En su experimento, ¿cuál fue la probabilidad de que cayeran las caras con más de 4 puntos? ____

Figura 5. Problemas presentados en los libros de cuarto y sexto grado

No se encontró evidencia en los libros de texto de tecnologías o teorías que justificara tal uso de técnicas para los alumnos. Sin embargo, la SEP muestra un programa alterno denominado *Guía del maestro* donde es posible inferir dichos elementos. De acuerdo con SEP (2011b), el estudio de las matemáticas en la educación primaria consiste en utilizar secuencias de situaciones problemáticas que despierten el interés de los alumnos y los inviten a reflexionar y encontrar diferentes formas de resolver los problemas. Estos argumentos permiten inferir el porqué del planteamiento de problemas; sin embargo, poco refieren a la importancia del contexto en ellos.

Cuadro 8. Bloque práctico técnico T_{SR}

Género de tareas	Técnicas	Grados en donde se utiliza
Plantear a los alumnos problemas en situaciones reales [G_{SR}]	[τ_{SR1}] Lanzamiento de monedas o dados para un experimento y registro en tablas	4º, 5º y 6º
(Tareas que plantean a los alumnos un problema basado en una situación real donde se recolecten los datos de su realidad)	[τ_{SR2}] Lanzamiento de monedas o dados como parte de alguna actividad lúdica (avanzar en un tablero de juego)	4º, 5º y 6º

b) Géneros de tareas que planteaban a los alumnos una situación pseudoconcreta [G_{MPC}]

Estas tareas involucraban la presentación de problemas enmarcados en un contexto cotidiano para el alumno, pero con datos que el libro de texto brindaba de antemano. La mayoría de las situaciones mostraban problemáticas que se relacionaban con combinatorias de candados, prendas de vestir u otros elementos. También eran comunes las problemáticas sobre lanzamiento de dados y monedas, pero con datos enlistados en el libro con el afán de provocar cuestiones específicas. En la figura 6 se plasma una actividad como las referidas.

Los libros no especifican la técnica para realizar dicho género de tareas. Los problemas que se plantean generalmente admiten cualquier tipo de procedimiento para su resolución. Se fomenta el uso de procedimientos informales a elección de los alumnos.

A pesar de que en los libros de texto para el alumno no se encontró ningún elemento tecnológico o teórico para este género de tareas, sí existen algunos

2. Pedro tiene que programar la combinación de un candado. Ayúdale, escribiendo todas las formas diferentes en que es posible establecer dicha combinación utilizando solamente los dígitos 0, 1, 2 y 3, sin repetirlos y usándolos todos cada vez.

Figura 6. Problema presentado en el libro de cuarto grado elementos en el material para el maestro. Según SEP (2011b), la construcción de saber matemático va de lo informal a lo convencional, en cuanto relación con el lenguaje como con las representaciones y procedimientos.

c) Género de tareas referentes al establecimiento de un modelo matemático [G_{MM}]

En la totalidad de los contenidos aparecen actividades donde se pide el establecimiento o uso de un modelo matemático. Algunas lecciones presentan preguntas específicas que guían la elaboración de algún modelo matemático, ya sea de manera explícita o no (véase la figura 7).

En algunas ocasiones, en el libro se sugiere la técnica para resolver este género de tareas y en otras, es necesario que el alumno recuerde algunos conocimientos aprendidos anteriormente. De nuevo, elementos como tecnologías y teorías no se muestran en el libro para el alumno. En la Guía para el maestro se hace un pequeño acercamiento a las razones para proponer este género de tareas: "Para resolver una situación, el alumno debe usar sus conocimientos previos, los cuales le permiten entrar en la situación, pero el desafío consiste en reestructurar algo que ya sabe, sea para modificarlo, ampliarlo, rechazarlo o volver a aplicarlo en una situación" (SEP, 2011b, p. 68).

Como un apartado especial, incluimos en esta sección un desglose de los distintos contenidos matemáticos referidos a la probabilidad, es decir, un análisis de la organización matemática. Las razones para incluir dicho análisis son diversas.

1. En parejas, lancen un dado 50 veces.
   - Registren en la segunda columna con una marca cada ocasión que aparezca una de las seis caras (que corresponden a números del 1 al 6).
   - Al concluir los 50 lanzamientos, determinen el total de veces que salió cada número anótenlo en la tercera columna.
   - En la cuarta columna escriban la siguiente fracción

$$\frac{\text{Total de veces que cayó la cara}}{\text{Total de lanzamientos del dado}}$$

   para cada una de las caras del dado. Observen que como se realizaron 50 lanzamientos en todas las fracciones el denominador será 50.

Figura 7. Específicamente en la tercera viñeta es posible observar el modelo teórico para el cálculo de probabilidad

Primeramente, tiene por objetivo ser exhaustivos en el análisis hecho a los libros de texto. Además, y de acuerdo con García y otros (2006), no hay praxeología matemática sin el estudio del proceso que lo genera, esto es, la praxeología didáctica.

Son cinco los géneros de tarea referidas a la OM:

- Encontrar las combinaciones posibles en un problema dado [G_{DM1}]
- Encontrar las permutaciones posibles en un problema dado [G_{DM2}]
- Comparar entre dos eventos cuál es más probable [G_{DM3}]
- Desarrollar la noción de espacio muestral [G_{DM4}]
- Calcular la probabilidad de ocurrencia de un experimento aleatorio [G_{DM5}]

En el cuadro 9 se presentan de manera sintética los elementos de las praxeologías de cada tipo de tarea.

Cuadro 9. Análisis praxeológico de la organización matemática referida a probabilidad

Género de tarea OM	Técnica	Tecnología	Teoría
Encontrar las combinaciones posibles en un problema dado	[τ_{DM11}] Dibujar combinaciones posibles y contar las posibilidades	No se encontró	No se encontró
	[τ_{DM12}] Dibujar las combinaciones utilizando una tabla Multiplicar las diversas opciones	No se encontró	No se encontró
Encontrar las permutaciones posibles en un problema dado [T_{DM2}]	[τ_{DM2}] Dibujar las posibilidades y contarlas	No se encontró	No se encontró
Comparar entre dos eventos cuál es más probable [T_{DM3}]	[τ_{DM31}] Realice el experimento Registrar en una tabla	No se encontró	No se encontró

Cuadro 9. Análisis praxeológico de la organización matemática referida a probabilidad (conclusión)

Género de tarea OM	Técnica	Tecnología	Teoría
	[τ_{DM32}] Contar las probabilidades de cada caso y comparar	No se encontró	No se encontró
Desarrollar la noción de espacio muestral	[τ_{DM4}] Registrar en una tabla las distintas posibilidades de resultado de un experimento y contarlos.	Se ofrece a los alumnos un indicio de tecnología [θ_{DM4}] al ilustrar recuadros donde se despliega la definición del espacio muestral (véase la figura 4)	No se encontró
Calcular la probabilidad de ocurrencia de un experimento aleatorio	[τ_{DM51}] Exprese en forma de fracción las veces que ocurrió un determinado caso y el total de eventos	Se encuentra la explicación sobre el cálculo de la probabilidad en un experimento, es decir, la tecnología que lo implica [θ_{DM5}] (véase la figura 19)	No se encontró
	[τ_{DM2}] Exprese en forma de porcentaje la probabilidad		No se encontró

d) Género de tareas referidas al trabajo con modelos matemáticos [G_{RM}]

Recordemos que de acuerdo con el cuadro 1, este género de tareas refiere a aquellas donde se le pide al alumno trabajar con un modelo matemático, ya sea creado o explicado por el docente en forma de algoritmo aislado. En las 11 lecciones de probabilidad analizadas, todos los géneros de tarea referidos al trabajo con modelos matemáticos referían a algoritmos que surgían de la necesidad de resolver un problema. En la figura 8 es posible apreciar que los alumnos deben calcular la probabilidad de dos eventos que anteriormente habían experimentado en el aula.

- Si se lanzan al mismo tiempo una moneda y un dado: ¿Qué es más probable. Obtener par y águila o número impar y sol? ________________________________

Figura 8. Pregunta que se resuelve mediante el trabajo con un modelo matemático

Las técnicas que el libro propone para la resolución de este género de tareas buscan la comunicación entre los alumnos para la generación de diversos procedimientos, ya que muy pocas veces se explicita en los materiales revisados alguna técnica única o correcta. La tecnología y teoría, ausentes en el libro del alumno, pueden inferirse en la *Guía del maestro,* donde se especifica que el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en la que los alumnos lo puedan utilizar hábilmente para solucionar problemas y lo puedan reconstruir en caso de olvido (SEP, 2011b).

e) Géneros de tareas relacionadas con la resolución del modelo pseudoconcreto [G_{RPC}]

El género de tarea donde se interpreta el resultado matemático a la luz de la situación pseudoconcreta planteada refiere al quinto elemento del esquema de modelación. Las tareas referidas a este género se plantean mediante preguntas reflexivas, luego de haber hecho los cálculos necesarios para obtener una respuesta matemática. Los cuestionamientos alentaban a valorar e interpretar la respuesta obtenida mediante diversos procesos de resolución y relacionarla con el problema que lo desencadenó.

Un ejemplo de este tipo de tareas se presenta en la figura 9, donde, de inicio, se presenta un problema en una realidad pseudoconcreta para después solicitar que se certifiquen las respuestas y procedimientos elegidos.

Las técnicas para dar solución a dichas actividades no eran explícitas. Los libros de texto promovían la variedad de procedimientos y una riqueza en la discusión generada por los alumnos. En el cuadro 10 se presentan la técnica y los grados escolares en los que se sugiere emplearla.

De nuevo, aunque no se muestran indicios de tecnología o teoría involucrada a lo largo de las lecciones, se muestran algunas explicaciones en la *Guía para el maestro,* donde se advierte que el docente debe propiciar un ambiente

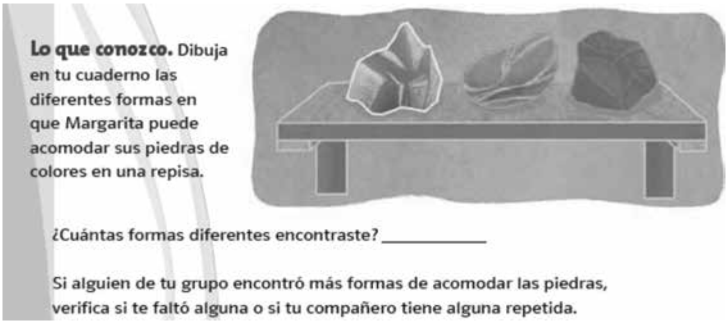


Figura 9. Problemas de permutaciones propuesto en el libro de cuarto grado

Cuadro 10. Bloque práctico técnico T_{RCP}

Género de tarea	Técnicas	Grados en donde se utiliza
Tareas que proponen el trabajo con el resultado del modelo pseudoconcreto	[τ_{RCP}] Comparar con sus compañeros las respuestas al problema pseudoconcreto y el procedimiento de resolución	1º 2º 3º 4º 5º 6º

en el que los alumnos compartan sus ideas, sus acuerdos y desacuerdos, expresándose con libertad y reflexionando acerca de la solución del problema (SEP, 2011b).

f) Géneros de tareas referidas a la relación entre el resultado obtenido y la situación real [G_{RR}]

Un género de tareas muy importante dentro de la modelación matemática es aquel en el que se pide establecer una relación entre el resultado obtenido a partir del trabajo con el modelo matemático y la situación real de la cual se derivó. Las tareas propias de este género generalmente se plantean a través de preguntas que intentan promover la reflexión y el análisis del resultado matemático en términos del contexto del cual surgió. La figura 10 muestra un ejem-

- De acuerdo con los resultados de la tabla, al lanzar al mismo tiempo dos monedas, ¿qué es más probable obtener, el mismo resultado en las dos o resultados diferentes?

___

- Si se lanzan al mismo tiempo tres monedas, ¿qué es más probable, obtener el mismo resultado en las tres o dos iguales y una diferente?

___

Figura 10. Problemas presentados en el libro de sexto grado

plo de este género de tareas donde, luego de la realización de un experimento aleatorio, se proponen preguntas con el fin de discutir la respuesta utilizando siempre términos de la situación real.

Para la realización de estas tareas, los libros de texto proponían una sola técnica, dar respuesta mediante la confrontación de resultados con los compañeros a las preguntas establecidas (véase el cuadro 11). No se muestran elementos tecnológicos o teóricos acordes a este género de tareas; sin embargo, los elementos presentados en el género de tareas anterior [G_{RPC}] explican de manera general su razón de ser.

Conclusiones del análisis praxeológico

El análisis realizado permitió reconocer el papel que la modelización matemática tiene dentro de las actividades planteadas para el trabajo con los alumnos de educación primaria. A su vez, ello define el nivel de congruencia con lo esti-

Cuadro 11. Bloque práctico técnico T_{RR}

Género de tareas	Técnicas	Grados en donde se utiliza
Tareas que proponen el trabajo con el resultado de la situación real	[τ_{RR}] Contestar preguntas reflexivas sobre las respuestas matemáticas en términos de la situación real	3º 4º 5º 6º

pulado en los planes de estudio oficiales de este nivel educativo. Se presentan a continuación algunas de las conclusiones encontradas.

Los resultados muestran que, en la mayoría de sus lecciones, los libros de texto de matemáticas de la escuela primaria plantean géneros de tareas referidas al dominio matemático. Los géneros de tareas que predominan en las lecciones de los diversos grados son aquellas donde se pide el uso de algoritmos aislados que no surge de contextos cotidianos. Ello denota que la modelación matemática es involucrada pobremente en las lecciones a partir del seguimiento de las actividades que se proponen.

De entre los contenidos matemáticos analizados, se destacan las lecciones referentes al aprendizaje de la probabilidad, puesto que en ellas se encuentran los seis géneros de tareas de modelación matemática. Siete de las 11 lecciones proponen tareas que involucran el planteamiento de una situación real. Principalmente se recurre a la generación de datos por los propios alumnos mediante diversos juegos que involucran dados o monedas. Las siete lecciones donde se trabaja con el planteamiento de situaciones reales promueven, a su vez, reflexiones sobre el resultado matemático obtenido. Principalmente se identifica como técnica de esta praxeología la respuesta a preguntas que generen una reflexión en los alumnos.

La totalidad de las lecciones de probabilidad incorporan los otros cuatro géneros tareas de modelación matemática. En siete de las 11 lecciones referidas a probabilidad, se plantea una situación problema en términos de un contexto utilizando datos otorgados por el libro. Este tipo de tareas se identificó como una situación *pseudoconcreta*.

Los contenidos referidos a probabilidad no aparecen en el Plan de estudios 2011; sin embargo, se encuentran en los libros de texto de la edición de 2009. Ello evidencia una falta de correspondencia entre ambos textos elaborados por la SEP.

Los géneros de tareas que conciernen al planteamiento de un modelo matemático y al trabajo con él se conjuntaron para la realización de un estudio más detallado con el nombre de Géneros de tareas del dominio matemático. Logramos el desglose de cinco tipos de tareas específicas referentes a la organización matemática: encontrar las combinaciones posibles en un problema dado; encontrar las permutaciones posibles en un problema dado; comparar entre dos eventos cuál es el más probable; desarrollar la noción de espacio muestral, y calcular la probabilidad de ocurrencia de un experimento aleatorio.

El análisis muestra que los libros de texto no proponen ninguna técnica específica para realizar los tipos de tareas. Por lo general, se sugiere la utilización de procedimientos informales que generen una posterior discusión de ideas y validación de respuestas.

Son pocas las lecciones relativas a la probabilidad en las que es posible encontrar un indicio de tecnología. Solamente en dos de ellas se muestran recuadros que despliegan la definición de cierto concepto o la descripción de algún procedimiento específico.

No se explicita en ninguna lección la teoría que sustenta la tecnología de la praxeología. Las técnicas y tareas llevadas a cabo se proponen sin establecer el porqué o bajo qué supuestos es posible su argumentación. Sin embargo, y de manera complementaria, un análisis de las guías para el maestro que propone la SEP permite inferir algunos de estos elementos praxeológicos. A pesar de este intento, estos resultados coinciden con lo establecido previamente por Bosch, Fonseca y Gascón (2004), quienes muestran la ausencia de discurso tecnológico en los libros de texto de matemática en la enseñanza secundaria española.

CONCLUSIONES

Existe una problemática aceptada respecto al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en el nivel básico en México. La educación primaria se constituye como base de múltiples nociones matemáticas consideradas como indispensables en los niveles educativos posteriores. A su vez, es en la educación primaria donde es deseable que los alumnos inicien el aprecio a la matemática como aquella herramienta flexible que permite dar solución a una serie de problemas de la realidad. La presente investigación se interesa en aportar elementos para el logro de tal objetivo mediante un primer diagnóstico que muestre cómo se incorpora la modelación matemática en los libros de texto del país.

El acercamiento a los libros de texto de matemáticas mediante la TAD permitió dar a conocer por medio de un análisis formal el distanciamiento que existe entre el discurso político-educativo presente en los planes de estudio desprendidos de la RIEB con los materiales que se ponen a disposición de maestros y alumnos en las escuelas primarias.

El análisis elaborado concluye que la modelación matemática, estrategia que apuntala al acercamiento entre la matemática de la vida cotidiana y la escolar, no está presente en la gran mayoría de las lecciones de los libros de texto de matemáticas para los alumnos de educación primaria. En ellas predomina la propuesta de géneros de tareas del dominio matemático, en el que se pide el trabajo con algoritmos matemáticos específicos. Los géneros de tarea referidos al planteamiento de problemas en el dominio real o *pseudoconcreto* son muy escasos, así como lo son los que demandan un trabajo con los resultados en ambos dominios mencionados.

Nuestra investigación aporta elementos al esfuerzo que siguen investigadores como Barquero, Bosch y Gascón (2011) hacia el desarrollo de una posible manera de analizar las praxeologías presentes en el proceso de modelación matemática mediante la búsqueda de los diferentes elementos en libros de texto. Los géneros de tareas que fueron adecuados de investigaciones anteriores permitieron un estudio detallado que ayudó a ver la relación de estos con cada etapa del ciclo de modelación matemática.

Consideramos que la búsqueda de los géneros de tarea de modelación matemática no debe verse limitado a libros de texto, sino que podría generar una herramienta importante para evaluar planes de clase de maestros. Con ello, se podrían brindar recomendaciones que conlleven al mejoramiento de las actividades faltantes para el desarrollo de secuencias mediante modelación matemática.

Creemos necesaria la modificación de los libros de texto de matemáticas de los alumnos para que se establezca en ellos un mayor número de géneros de tareas de modelación matemática. A su vez, coincidimos con Doerr (2007) y Romo, Romo y Velez (2012) en la necesidad de un trabajo específico y detallado en el diseño de situaciones didácticas basadas en modelación matemática con los docentes en formación, puesto que ellos representan un agente activo en la puesta en marcha de las reformas curriculares.

El contenido que se seleccionó como el que poseía mayores elementos de modelación matemática se retoma como nuestra actual línea de investigación dirigida precisamente al estudio de la formación de docentes en modelación matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, C. (1998), "Neither a microscope nor a telescope, just a mathscope", en A. Ahmed y H. Williams (eds.), *Mathematical Modelling, Teaching and Assesment in a Technology Rich World*, Chichester, Inglaterra, Ellis Horwood, pp. 3-10..

Alsina, C. (2007), "Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions", en W. Blum, P. L. Galbrait, H. W. Henn y M. Niss (eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education*, Berlín, Springer, pp. 35-55.

Barquero, B., M. Bosch y J. Gascón (2011), "Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. Enseñanza de las Ciencias", *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, vol. 29, núm. 3, pp. 339-352.

Blomhøj, M. y T. Jensen (2003), "Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning", *Teaching Mathematics and Its Applications*, vol. 22, núm. 3, pp. 123-139.

Blum, W. y R. Borromeo (2009), "Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt?", *Mathematical Modelling*, vol. 1, núm. 1, pp. 45-58.

Bosch, M., C. Fonseca y J. Gascón (2004), "Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 24, núm. 2, pp. 205-250.

Brousseau, G. (1999), "Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 4, núm. 2, pp. 165-198.

Carraher, T., D. Carraher y A. Schliemann (2002), *En la vida diez, en la escuela cero*, México, Siglo veintiuno editores.

Chaachoua, H. (2009), "Étude des programmes et manuels scolaires", *Didactique des Sciences* [Material de clase].

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*, Francia, La Pensée Sauvage.

——— (1990), "Didactique, anthropologie, mathématiques", postfacio a la segunda edición de *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,* Grenoble, La pensée sauvage.

——— (1992), "Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 21, núm. 1, pp. 1-37.

——— (1999), "El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 19, núm. 2, pp. 221-266.

Confrey, J. (2007), "Epistemology and modelling-overview", en W. Blum, P. L. Galbrait, H. W. Henn y M. Niss (eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education*, Berlín, Springer, pp. 125-128.

Cordero, F., L. Suárez, J. Mena, J. Arrieta, R. Rodríguez, A. Romo y M. Solís (2009), "La modelación y la tecnología en las prácticas de enseñanza de las matemáticas", en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22*, vol. 22, pp. 1717-1726.

Corica, A. R. y M. R. Otero (2009), "Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y a la producción de los estudiantes en el momento de la evaluación", *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, vol. 12, núm. 3, pp. 305-331.

Creswell, J. (2007), *Qualitative Inquiry and Research Design,* California, Sage.

Doerr, H. M. (2007), "What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling?", en W. Blum, P. L. Galbrait, H. W. Henn y M. Niss (eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education,* Berlín, Springer, pp. 69-78.

García, F. J. (2005), *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis doctoral, Universidad de Jaén.

García, F. J., J. Gascón, L. Ruiz-Higueras y M. Bosch (2006), "Mathematical Modelling as a tool for the connection of school mathematics", *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, vol. 38, núm. 3, pp. 222-246.

Guyon, E. (2008), *Étude des raisons d'apparition d'erreurs stables chez les élèves de troisième sur un sous domaine du calcul littéral: la factorisation*, Tesis de maestría inédita, Universitè Joseph Fourier, Francia.

Hernández, R., P. Baptista y C. Fernández (2010), *Metodología de la investigación,* México, D.F., McGraw-Hill.

INEGI (2010), *Asistencia escolar. De 6 a 14 años.* Recuperado el 20 septiembre de 2014, de http://cuentame.inegi.org.mx/poblacion/asistencia.aspx?tema=P

Kaiser, G. y B. Sriraman (2006), "A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education", *Cognitive Psychology*, vol. 38, núm. 3, pp. 302-310. Disponible en: http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02652813#page-1

Lesh, R. y C. Yoon (2007), "What is the distinctive in (our views about) models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching?", en W. Blum, P. L. Galbrait, H. W. Henn y M. Niss (eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education*, Berlín, Springer, pp. 161-170.

Maaß, K. (2006), "What are modelling competencies?", *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, vol. 38, núm. 2, pp. 113-142.

Niss, M., W. Blum y P. Galbraith (2007), "Introduction", en W. Blum, P. L. Galbrait,

H. W. Henn y M. Niss (eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education,* Berlín, Springer, pp. 3-32.

OCDE (2010), *PISA 2009 Results: Learning to Learn Strategies*, Francia, OCDE Publishing.

Pollak, H. (1969), "How can we teach applications of Mathematics?", *Educational Studies*, vol. 2, núm. 2, pp. 393-404. doi:10.1007/BF00303471

Rodríguez, R. (2007), *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en classe de physique et de mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S*, Tesis de doctorado inédita, Université Joseph Fourier, Francia.

——— (2010), "Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales", *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 13, núms. 4-1, pp. 191-210.

Romo, A., R. Romo y H. Vélez (2012), "De la ingeniería biomédica al aula de matemáticas", *Revista Electrónica de Computación, Informática, Biomédica y Electrónica*, vol. 1, núm. 1.

Ruiz-Higueras, L. y F. García (2011), "Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil", *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa*, vol. 14, núm. 1, pp. 41-70.

Saglam, A. (2004), *Les équations différentielles en mathématiques et en physique*, Tesis de doctorado inédita, Université Joseph Fourier, Francia.

Santos, L. M. (1997), *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*, México, Grupo Editorial Iberoamérica.

SEP (2009), *Plan de estudios 2009*, México, Secretaría de Educación Pública.

——— (2011a), *Plan de estudios 2011*, México, SEP.

——— (2011b), *Programas de estudio 2011, Guía para el maestro, Educación Básica Primaria, Primer grado*, México, Secretaría de Educación Pública.

——— (2011c), *Matemáticas, Primer grado*, 2ª. ed., Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

——— (2011d), *Matemáticas, Segundo grado*, 2ª. ed., Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

——— (2011e), *Matemáticas, Tercer grado*, 2ª. ed., Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

——— (2011f), *Matemáticas, Cuarto grado*, 2ª. ed., Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

SEP (2011g), *Matemáticas, Quinto grado*, 2ª. ed., Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

——— (2011h), *Matemáticas, Sexto grado*, 2º. ed., Ciudad de México, Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.

——— (2013), *Resultados históricos nacionales 2011*, México, Secretaría de Educación Pública.

Trigueros, M. (2006), "Ideas acerca del movimiento del péndulo: un estudio desde una perspectiva de modelación", *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, vol. 11, núm. 31, pp. 1207-1240.

Verret, M. (1975), *Le temps des études*, Francia, Honoré Champion.

Yin, R. (2003), *Case Study Research,* California, Sage Publications.

DATOS DE LAS AUTORAS

Samantha Quiroz Rivera
Tecnológico de Monterrey, México
samanthaq.rivera@gmail.com

Ruth Rodríguez Gallegos
Tecnológico de Monterrey, México
ruthrdz@itesm.mx

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el *Laberinto de decimales*

Evelyn Valencia y Alicia Ávila

Resumen: Desde hace varias décadas se han indagado los procesos de aprendizaje de los números decimales y se han identificado dificultades y obstáculos para su comprensión, muchos de ellos favorecidos por la enseñanza. Uno de esos obstáculos es desprenderse de los modelos intuitivos de la multiplicación y división construidos en el contexto de los números naturales. En este artículo se analizan los resultados de la aplicación de una situación didáctica sustentada en un dispositivo que tiende a favorecer el abandono de estos modelos: el *Laberinto de los decimales.* El escrito se centra en analizar la evolución de los razonamientos de los alumnos al interactuar con este dispositivo. Se observa el abandono (no sencillo) de la idea "la multiplicación siempre agranda, la división siempre achica". En este proceso, median ideas diversas que desembocan en la construcción de nuevas reglas sobre los efectos de estas operaciones.

Palabras clave: multiplicación y división con números decimales, modelos intuitivos, aprendizaje de los números decimales, situaciones didácticas, construcción de conocimiento.

Previous ideas about multiplication and division with decimals: its evolution from an experience with the *Laberinto de decimales*

Abstract: For several decades, students' learning processes of decimal numbers have been investigated. Difficulties and obstacles have been identified, some of which can be attributed to the instructional approaches that are used. One of those obstacles is related to the intuitive models of the meaning of multiplication and division, which students develop as they engage with these operations in the context of natural numbers. In this paper, results are analyzed of the

Fecha de recepción: 7 de junio de 2015; fecha de aprobación: 8 de octubre de 2015.

implementation of a didactical situation, named "The maze of decimals", aimed at overcoming those models. The analysis centers on the evolution of students' reasoning while engaging in the situation. It is noticeable how students struggle to abandon the conceptions of "multiplication makes bigger, division shrinks." This process is mediated by diverse ideas that lead to the construction of new rules about the meaning of multiplication and division.

Keywords: multiplication and division with decimals, intuitive models, learning decimals, didactic situations, knowledge building.

LA PROBLEMÁTICA

Desde hace algunas décadas se han realizado investigaciones en torno a las dificultades que representa para los estudiantes el aprendizaje de los números decimales. Esas dificultades se deben en parte a que algunos de los conocimientos adquiridos sobre los números naturales se convierten en obstáculo para la comprensión de estos "nuevos números" (cf. Brousseau, 1998). Y es que, como Brousseu ha señalado: "Si una noción tiene éxito suficiente durante un tiempo largo, toma un valor, una consistencia, una significación, un desarrollo que hacen cada vez más difícil su modificación, su recuperación o su rechazo: la noción deviene a la vez, para las adquisiciones ulteriores, un obstáculo y un punto de apoyo") (Brousseau, 1998, p. 119). Es decir, que los naturales devenidos obstáculo son parte del proceso de conocer. Pero se trata también de una cuestión favorecida por la enseñanza, ya que, a partir de la manera en que comúnmente se acerca a los niños a los decimales, se empaña la diferencia entre estos números y los naturales. Y esta falta de diferenciación se extiende hasta alcanzar a las operaciones y su significado.

Algunos aspectos identificados reiteradamente como problemáticos en el aprendizaje de los decimales son los siguientes:

- *El significado de los decimales*. En la escuela se suelen presentar los decimales únicamente en contextos como el dinero y la medición en vinculación con el sistema decimal de medidas, y la manera en que se trabajan no siempre permite evidenciar que el valor de la parte decimal de un número se define en función de su relación con la unidad, sino que suelen utilizarse unidades distintas para identificar la parte entera y la decimal, por ejemplo: pesos y centavos o metros y centímetros, opacándose así la naturaleza fraccionaria de estos números (Brousseau, 1998; Van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Van Herpen y Keijzer, 2008; Saiz, Gorostegui y Vilotta, 2011, y Ávila, 2013).

- *Comparación y orden*. Las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes para ordenar correctamente números decimales sin duda están vinculadas al significado que se otorga a estos números. Como ya dijimos, con frecuencia se consideran la parte entera y la parte decimal como grupos de números naturales separados por el punto y a estos números se les aplican las reglas utilizadas para ordenar los naturales (Brousseau, 1998; Roditi, 2007). Con base en esa misma lógica, los niños consideran la cantidad de cifras que posee el número después del punto como criterio para determinar si es mayor o menor que otro cuya parte entera es equivalente (Roditi, 2007; Ávila, 2013).
- *Densidad*. Esta propiedad caracteriza a los números decimales en cuanto a que son un subconjunto de los racionales y refiere al hecho de que, entre cualesquiera dos números decimales distintos, puede encontrarse siempre otro número decimal (cf. por ejemplo, Peterson y Hashisaki, 1969). Esta propiedad es muy difícil de comprender por parte de estudiantes que concluyen la primaria (Ávila, 2013), ya que en las clases de matemáticas se sobregeneraliza la naturaleza discreta de los números naturales, produciéndose obstáculos en los razonamientos de los estudiantes que impiden la comprensión de esta propiedad; los estudiantes suelen considerar que entre dos decimales "falsos consecutivos",[1] no se podrá ubicar ningún otro decimal (Brousseau, 1998; Broitman, 2003; Ávila, 2013; Saiz, Gorostegui y Vilotta, 2011; Valencia, 2014).
- *Cálculo y operaciones*. Muchos profesores y estudiantes, según estudios relativamente recientes, suelen entender que la única dificultad que ofrecen las sumas y restas con decimales, es saber *alinear* los números con base en el punto decimal. Una vez resuelta esta cuestión, se trata simplemente de aplicar las reglas de las operaciones con números naturales para obtener el resultado buscado (Ávila, 2008; Konic, Godino y Rivas, 2010). De este modo, la perspectiva conceptual es sustituida por la algorítmica, que se extiende a la multiplicación y a

[1] Esta expresión, utilizada por Ávila (2013), refiere a pares de números decimales que, prescindiendo del punto, serían antecesor y sucesor en el campo de los naturales, por ejemplo 4.89 y 4.90.

la división, eliminándose cualquier reflexión respecto del significado de estas operaciones.

- *Los efectos de la multiplicación y división de decimales*. La falta de un acercamiento conceptual a los cálculos con decimales ha provocado que se genere en los estudiantes una serie de ideas o conceptos erróneos acerca de las operaciones con estos números, por ejemplo, generalizar el hecho de que, al efectuar la multiplicación de dos números dados, cualesquiera que estos sean, el número obtenido como producto siempre será mayor que los factores. De igual modo, se cree que, al efectuar una división, el divisor siempre debe ser menor que el dividendo, o que el número obtenido como cociente siempre será menor que el número que se divide (Graeber y Tirosh, 1989; Van Galen y otros, 2008).

Este tipo de ideas erróneas asociadas a la multiplicación y la división fue informado desde hace tiempo. Un estudio sobre el tema muy consultado por los investigadores de América Latina data de los años ochenta y fue realizado por Margaret Brown en Inglaterra (Brown, 1981). Esta autora informó:

> Es claro que la idea de que "la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica" está firmemente instalada entre los estudiantes [de entre 12 y 15 años] (Brown, 1981, p. 54).

Algunas de las evidencias ofrecidas en este estudio son particularmente interesantes, por ejemplo, las respuestas dadas por los estudiantes al ítem siguiente:

15. [En cada pareja de cálculos] *Encierra el cálculo que dé como respuesta el número más grande:*

a) 8×4 o $8 \div 4$
b) 8×0.4 o $8 \div 0.4$
c) 0.8×0.4 o $0.8 \div 0.4$

Tabla de porcentajes de respuesta, por edades, a la pregunta 15[2]

	12 años	13 años	14 años	15 años
$\times, \div, \div$ (correcta)	13	8	15	18
$\times, \times, \times$ (incorrecta)	50	58	47	30

Como se ve, en un porcentaje muy alto, los estudiantes consideran que la multiplicación es la única operación que agranda el número de partida. Esta prevalencia, que Brown denomina "síndrome de la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica", no constituye un hecho inocuo, sin impacto en otras conceptualizaciones sobre los decimales. Según la evidencia aportada por la propia Brown, el síndrome de la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica (y que en adelante llamaremos *síndrome* MADA) afecta a la elección apropiada de estas operaciones al tratar de resolver problemas que las implican (cf. Brown, 1981, p. 55). La relevancia del síndrome, por tanto, se hace visible si consideramos que una noción toma sentido por los errores que evita y los problemas que ayuda a resolver (cf. Brousseau, 1998, pp. 119 y ss.). Pero antes de avanzar respecto de este punto, abrimos un paréntesis para aclarar el sentido que damos al término *síndrome*.

El término, según el diccionario de la Real Academia Española, no significa sólo el reflejo de una enfermedad, sino también "un conjunto de fenómenos que caracterizan una situación determinada" (en el caso que tratamos, la interpretación de la multiplicación y la división adquirida con los naturales y que erróneamente se extiende a otros conjuntos numéricos). Más cercano al sentido que le damos en este artículo, es el que tiene el término en lengua inglesa donde *síndrome* significa: "Patrón predecible que tiende a ocurrir en ciertas circunstancias".[3]

Ahora bien, como decíamos antes, este *síndrome* o patrón tiene también sus raíces en las formas de enseñanza, en las decisiones que esta toma y en las omisiones que conlleva; se trata parcialmente de un efecto didáctico, donde efecto se entiende como aquello que sigue por virtud de una causa; que es

[2] Conviene señalar que este cuadro se tomó tal como aparece en el escrito de M. Brown (1981). Los datos que la autora presenta, puede inferirse, no refieren a la totalidad de respuestas obtenidas; probablemente se exponen sólo aquellas que destacan la prevalencia de la idea "la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica", tema que es eje de nuestro artículo.

[3] Definición tomada del *Merrian-Webster Dictionary,* consultado en la web el 27 de octubre de 2015.

resultante de una acción; que produce una serie de consecuencias, generalmente adversas, del uso de un tratamiento (cf. *Diccionario del Español de la Real Academia Española*), como puede ser el didáctico.

Una vez aclarado el sentido del *síndrome*, volvemos al hilo central del artículo para citar algunos de los resultados aportados por Brown en su intención de argumentar cómo el *síndrome* MADA tiene efectos en la elección de la multiplicación o división en cuanto herramientas de resolución de problemas con decimales.

19. "*Encierra el cálculo que necesitarías hacer para encontrar la respuesta* [al problema siguiente]:
    C. *El precio de la carne molida se anuncia a 88.2 peniques el kilo, ¿cuánto costará un paquete con 0.58 kg de carne molida?*
    $0.58 \div 88.2$ $88.2 - 0.58$ $0.58 - 88.2$
    0.58×88.2 $88.2 + 0.58$ $88.2 \div 0.58$

Tabla 4.6. Porcentajes de respuestas a la pregunta 19 C

	12 años	13 años	14 años	15 años
× (correcta)	18	17	21	29
÷ (incorrecta)	37	39	48	42

Se ve de nuevo la aparición del *síndrome* MADA, pues los estudiantes tienen fuertes dificultades para seleccionar la operación correcta, dificultades que derivan de una visión de las operaciones que es válida sólo en el conjunto de los números naturales.

La identificación del *síndrome* MADA dio lugar a la teoría de los "modelos intuitivos" (Fischbein y otros, 1985). Según esta teoría, los estudiantes construyen, desde que inician su aprendizaje con los números naturales, modelos intuitivos sobre la multiplicación y la división que no son válidos en otros conjuntos numéricos, pero que, habiéndose arraigado en el pensamiento de los estudiantes, se utilizan para interpretar las operaciones sin importar los números de que se trate. Los tres modelos intuitivos identificados por Fischbein y sus colegas son:

1. *La multiplicación como suma repetida*; un factor se repite y el otro marca el número de repeticiones, de ahí que el resultado de la multiplicación siempre debe ser mayor que los factores.

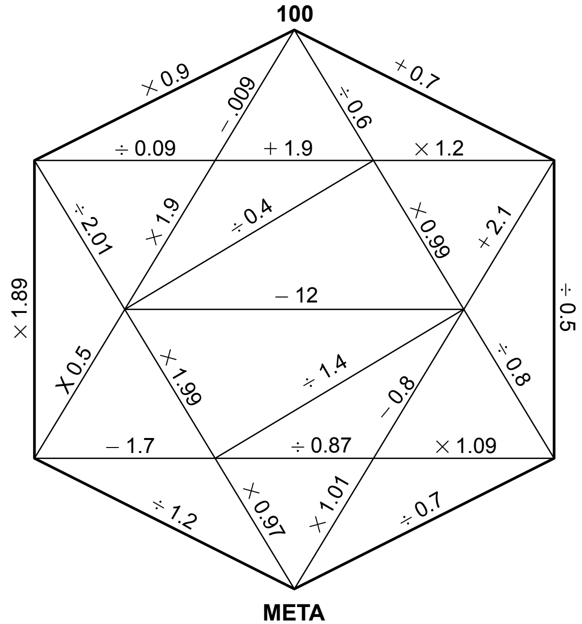
2. *La división como "partición*" (modelo intuitivo inicial); se trata de repartir una cantidad en un número dado de partes iguales, y la incógnita refiere al tamaño de las partes; de ahí que el dividendo deba ser mayor que el divisor y el cociente tenga que ser menor que el dividendo (no se podrían repartir 12 canicas entre 25 niños).
3. *La división como "agrupamiento"* (modelo más elaborado que el de partición); en este caso se conoce la cantidad por repartir y el tamaño de cada parte, y se busca el número de partes. Las ideas asociadas a este modelo son similares a las generadas en torno a la división como "partición".

No obstante la relevancia del tema, entre los investigadores y diseñadores de currículum, esta línea de investigación tuvo poca continuidad en América Latina y particularmente en México (cf. Ávila y García, 2008; Ávila, 2013; Valencia, 2014). Un resultado de este escaso interés es que tales cuestiones no se abordan en el ámbito escolar como aspectos importantes de los decimales. Aún más allá, recientemente se ha constatado que el *síndrome MADA* se refleja también en los docentes cuando se enfrentan a la multiplicación y la división con decimales (Barriendos, 2013). Al respecto, Barriendos informa cómo un grupo de profesores, participantes en un evento de formación, utiliza sumas y multiplicaciones y evita restas y divisiones como estrategia inicial para obtener "el número más grande". Tal situación no es sorprendente si, en general, los profesores consideran que la comprensión de los números decimales y sus diversos aspectos no representan dificultad alguna en la enseñanza ni en el aprendizaje, por lo que optan por un tratamiento simple centrado en la comunicación de las etiquetas (nombres) correspondientes a las columnas después del punto y a la ejercitación mecánica de los algoritmos, los cuales, a su decir, no implican mayor dificultad que saber en dónde colocar el punto (Ávila, 2008; y Ávila y García, 2008).

Con base en estos antecedentes sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números decimales, se planteó una situación didáctica basada en la aplicación de un dispositivo que tiene como propósito ayudar a rebasar el *síndrome MADA*. Se trata del *Laberinto de los decimales* (en adelante *Laberinto*) elaborado y difundido hace tiempo por el National Council of Teachers of Mathematics (2008) precisamente para hacer evidentes los efectos de las operaciones con números decimales y provocar la reflexión sobre ellos (véase figura 1).

Indicaciones

1. Sin hacer cálculos, elige el camino que consideres te dará más puntos y márcalo con algún color. Las reglas son las siguientes:
   a) Al empezar el juego tienes 100 puntos.
   b) Debes llegar a la meta siguiendo el camino de las operaciones que pienses que te darían más puntos.
   c) No debes pasar dos veces por el mismo segmento ni por el mismo punto.



2. Haz los cálculos del camino que elegiste para obtener tu total. Puedes utilizar una calculadora.
3. Compara tus resultados con los de tus compañeros y comenten lo que observan.

Figura 1. Laberinto de los decimales

OBJETIVOS Y DISEÑO DE LA SITUACIÓN SUSTENTADA EN EL *LABERINTO DE LOS DECIMALES*

Con base en la revisión de literatura y la aplicación de un cuestionario a niños de 11-12 años que no participaron en esta investigación, pero que asistían a la misma escuela donde esta se llevó a cabo, reconocimos el *síndrome* MADA como uno de los obstáculos necesarios de superar por parte de los estudiantes para lograr una comprensión amplia de los decimales. Por tal razón, se incluyó el trabajo con el *Laberinto*.

La situación basada en este dispositivo formó parte de una secuencia didáctica cuyo objetivo general fue conocer:

¿Cómo los estudiantes de sexto grado de primaria dotan de significado a los números decimales?

Para dar respuesta a tal pregunta, se preparó la secuencia didáctica conformada por ocho situaciones, cada una de las cuales se instrumentó en una sesión de aproximadamente una hora,[4] y se generaron otras preguntas más específicas que se contestarían una vez aplicada la secuencia:

- ¿Cuáles son las modificaciones o cambios observados en el aprendizaje de los estudiantes sobre los números decimales a partir de la aplicación de la secuencia?
- ¿Cómo se produjeron esos cambios?
- ¿Qué tareas y situaciones los generaron o favorecieron?

La situación basada en el *Laberinto* fue la séptima de la secuencia. El propósito específico de la situación fue trabajar a partir de las ideas de los niños sobre la multiplicación y división de decimales, interactuando con el *Laberinto*, dispositivo que, como ya mencionamos, busca hacer evidente que no siempre la multiplicación agranda el número de partida y, al efectuar una división, aquel no siempre se hará más pequeño, sino que el efecto de ambas operaciones dependerá de los números involucrados en el cálculo. En específico, para esta situación se plantearon las siguientes preguntas de investigación:

a) Si las ideas de los alumnos participantes reflejan el *síndrome* MADA, como es factible suponer con base en los resultados de investigaciones previas, ¿es posible lograr su modificación mediante la enseñanza?

b) ¿En qué medida el *Laberinto* es útil para promover la reflexión sobre dichas ideas y favorecer su abandono?

[4] Los aspectos trabajados en la secuencia fueron los siguientes: representación de los números decimales, equivalencia entre distintos representantes de un número decimal, significado de los números decimales, la unidad de referencia, orden en los decimales, noción de densidad, multiplicación y división con decimales y resolución de problemas con decimales.

c) ¿La interacción entre los compañeros, con la orientación y coordinación de alguien que sabe más, favorece adicionalmente la comprensión de los efectos de multiplicar y dividir con decimales?

Al igual que el resto de las que conformaron la secuencia, la situación se inspiró en la Teoría de Situaciones Didácticas de G. Brousseau (Brousseau, 1986). Un postulado fundamental de esta teoría es que el conocimiento matemático se construye mediante la acción y en relación directa con una situación-problema que exige una respuesta del alumno (cf. Brousseau, 1986, pp. 155 y ss.). La búsqueda de la respuesta –que conforme a esta teorización se realiza al margen de la acción del profesor, en situación a-didáctica– provoca en quien aprende distintos tipos de acción y de conocimiento que se expresan también de diferentes maneras; inicialmente, mediante unas ciertas estrategias de resolución que se ponen en marcha; posteriormente, mediante la expresión de dichas acciones con fines de comunicación de la acción realizada y los resultados obtenidos. Adicionalmente, en esta teoría, mostrar la validez de las respuestas –construidas en la interacción con la situación-problema– es una cuestión esencial en la construcción del saber, por lo que su socialización y discusión son indispensables como etapas por cubrir en el tránsito hacia el saber.

Como resultado de este proceso, los estudiantes habrán elaborado unos ciertos conocimientos provocados por la situación y la interacción con los compañeros. Finalmente, el profesor hará explícita su participación en la situación para contribuir a establecer la validez del conocimiento producido y elaborar el enunciado o enunciados cuyo papel es formular, de acuerdo con ciertas convenciones, el producto de la interacción con la situación –el nuevo conocimiento–, convirtiéndolo así en un saber reconocible y posteriormente utilizable (cf. Brousseau, 1986, p. 156).

Otro postulado fundamental de la teoría brousseauniana se refiere a la significación del conocimiento: el sentido de un conocimiento matemático se define no sólo por la colección de situaciones donde ese conocimiento se concreta en cuanto teoría matemática, "sino también por el conjunto de concepciones y elecciones que rechaza, de errores que evita [...]" (Brousseau, 1998, p. 118).

Teniendo como telón de fondo tales ideas,

- La dinámica de la situación consistió en presentar a los alumnos la actividad que debían realizar: determinar un trayecto en el *Laberinto*, con ciertas restricciones que se definirían en las consignas.

- La actividad de quien fungió como docente consistió en proponer la situación, dar las consignas necesarias y monitorear a los estudiantes durante la resolución planteando preguntas para orientar los razonamientos o dando pequeñas ayudas si se le solicitaban. En un momento posterior, dirigió la socialización y discusión de resultados y colaboró dando relevancia a aquellos que, conforme a los objetivos planteados, era importante retener e institucionalizar, aunque de manera aún interna, esto es, donde el grupo fija libremente sus convenciones como resultado del proceso de construcción del saber sin utilizar todavía rigurosamente las formalizaciones propias de la cultura matemática escolar (cf. Brousseau, 1986, pp. 156 y ss.).
- En diversos momentos del desarrollo de la sesión, con el fin de obtener más evidencias que permitieran comprender el tipo de razonamientos que desplegaban los alumnos o promover cierto tipo de reflexiones e ideas, se introdujeron preguntas intencionadas por parte de la docente.

Los participantes en la investigación

Participaron 34 alumnos de sexto grado de primaria –20 mujeres y 14 hombres– en edades comprendidas entre 11 y 12 años. Los participantes constituían un grupo de una escuela pública de una zona urbana de clase media baja al oriente de la Ciudad de México. El nivel de escolaridad de los padres de familia variaba entre los niveles de secundaria y preparatoria, la minoría de ellos poseían estudios de licenciatura. La escuela se orienta por el currículum y los lineamientos propuestos por la Secretaría de Educación Pública sin poseer alguna característica u orientación pedagógica distintiva.

El papel de docente lo desempeñó una de las autoras de este artículo, quien llevó a cabo la aplicación de toda la secuencia, incluido el desarrollo de la situación el *Laberinto*, como parte de su tesis de grado (Valencia, 2014).

DESARROLLO DE LA SITUACIÓN Y EVOLUCIÓN DE LAS IDEAS

Las consignas

Las consignas planteadas por escrito y entregadas a los alumnos en la misma hoja que el *Laberinto* fueron las siguientes:

1. Sin hacer cálculos, elige el camino que consideres te dará más puntos y márcalo con algún color. Las reglas son las siguientes:
   a) Al empezar el juego tienes 100 puntos.
   b) Debes llegar a la meta siguiendo el camino de las operaciones que pienses que te darían más puntos.
   c) No debes pasar dos veces por el mismo segmento ni por el mismo punto.

Una vez trazado el camino para llegar a la meta, las consignas que habrían de seguir los participantes fueron:

2. Haz los cálculos del camino que elegiste para obtener tu total. Puedes usar calculadora.
3. Compara tus resultados con los de tus compañeros y comenten lo que observan.

Las consignas escritas se acompañaron de la siguiente explicación por parte de la docente:

> *Lo que vamos a hacer hoy es como un juego, está en esta hoja, van a empezar con 100 puntos, tienen que escoger un camino que los lleve a la meta, pero tratando de escoger las operaciones que crean que les dan mayor puntaje... en cada línea hay operaciones, que nos van a decir si al pasar por esa línea vamos a multiplicar, dividir, sumar o restar... ustedes van a seguir el camino que crean que les va a dar un puntaje mayor. Las condiciones son que pueden hacer el recorrido que quieran, pero no pueden pasar dos veces por la misma línea ni por el mismo punto. Ahorita lo van a hacer nada más con lo que ustedes piensen, no van a usar la calculadora todavía, ni van a ir haciendo las operaciones, nada más van a elegir el camino con las operaciones que consideren... ya después hacemos los cálculos.*

Es decir que se solicitó a los estudiantes seguir la secuencia de operaciones que consideraran que los llevaría a obtener como resultado el mayor número posible. Posteriormente, se verificaría la validez o no validez de sus previsiones en cuanto a los resultados que se obtendrían al efectuarlas. Desde nuestro interés como investigadoras, al realizar la actividad, los estudiantes evidenciarían si interpretaban estas operaciones conforme al *síndrome* MADA.

Con base en esta actividad inicial se instrumentó el resto de la situación y se registró el proceso de abandono del síndrome durante el desarrollo de esta. La actividad se trabajó en varias fases; la primera se llevó a cabo de manera individual.

- *Fase 1. Definición, mediante trabajo individual, del trayecto que dé más puntos.* A cada estudiante se le entregó una hoja con el *Laberinto*. Conforme a las consignas, en un primer momento debían elegir un camino y marcarlo con color, siguiendo las operaciones que consideraran aumentarían de manera más significativa la puntuación inicial (100 puntos). Una vez dadas las instrucciones, la tarea se resolvió individualmente.

Aparición del síndrome MADA

La mayoría de los trayectos definidos por los estudiantes mostraron razonamientos anclados en la lógica de los números naturales, es decir que, conforme a nuestra hipótesis, se constató la presencia del *síndrome* MADA. Efectivamente, en los comentarios entre compañeros o los dirigidos a la profesora, se observa casi como constante la elección de trayectos con "puras sumas y multiplicaciones". La resta y la división forman parte de los trayectos de manera obligada porque, dicen los niños, ambas operaciones causan pérdida (en la figura 2 se pueden ver algunos de los trayectos definidos en la primera parte de la actividad).

Algunos comentarios recogidos en esta fase de la sesión son interesantes, por ejemplo, el de dos niñas –Areli y Karen– que, al comentar el trayecto de esta última, dicen, como haciendo un recuento de los cálculos:

> Areli: *Menos este* número, *por este* (enfático), *por este* (enfático), *entre este* (como expresando "¡ni modo!"), *por este* (enfático), *y ya*...

El énfasis en la expresión "por éste" parece expresar su idea de que con las multiplicaciones van a obtener puntajes altos, de ahí que las refieran enfáticamente, mientras que la resta y la división, según el tono utilizado, las usan "como mal necesario":

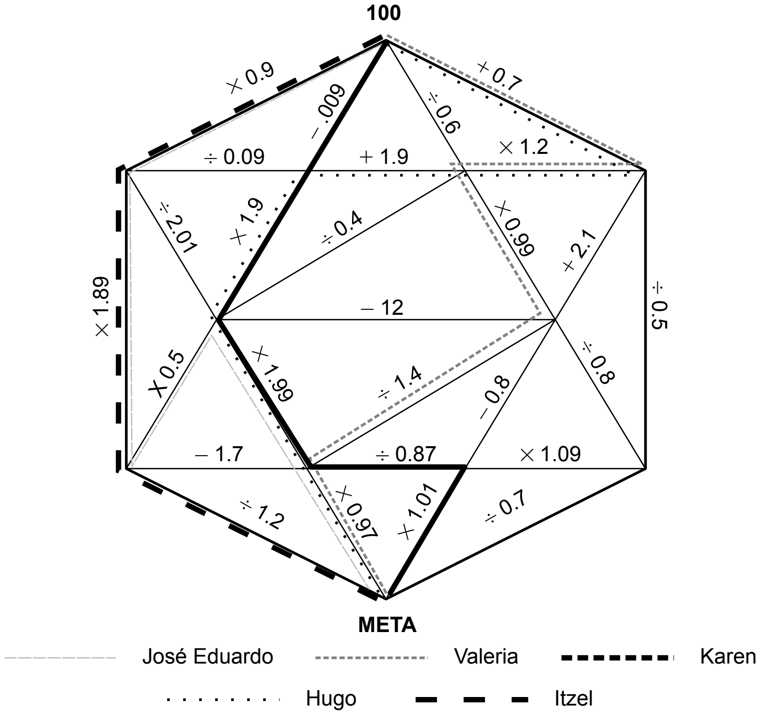


Figura 2. Algunos trayectos determinados en la actividad inicial

Una nueva idea: el número de operaciones también afecta la magnitud del resultado

Esta idea, expresada por varios estudiantes, se muestra en el comentario de Pedro, quien tiene una calculadora y dice a José Eduardo:

> Pedro: *Yo ocupo* más (operaciones) *que tú, yo tengo más sumas.*
>
> José Eduardo: *¿Sí?*
>
> Pedro: *Tú tienes cinco "pors"* (se refiere a multiplicaciones) *y yo tengo cinco* (multiplicaciones) *más una suma* (lo dice entusiasmado, como anticipando que por eso tendrá más puntos).

José Eduardo (cuenta las operaciones de su trayecto): *1, 2, 3, 4, 5*... (véase figura 2), *¡Ah!,* (como anticipando que va a tener menos puntos que su compañero).

Poco después,

Pedro (dice a José Eduardo): *¡Creo que tengo un camino super largo, con "pors" y "más"!* (borra, entusiasmado, el camino anterior e intenta trazar el nuevo).

En el mismo sentido, se escuchan comentarios de otros niños, por ejemplo "¡Pero tu camino está bien corto!"

Es decir, que las hipótesis con que los niños inician la actividad reflejan el *síndrome* MADA. Posteriormente, surge una idea más: el número de operaciones también es relevante para definir la magnitud del resultado: a mayor número de sumas y multiplicaciones, mayor será el resultado.

- *Fase 2. Puesta en común de resultados.* Después de que los estudiantes hubieron definido individualmente su trayecto, se inició la presentación de resultados a todo el grupo para su discusión. Esta fase se inició cuando la profesora preguntó a los alumnos "¿Alguien obtuvo un resultado menor que los 100 puntos con que comenzaron el juego?" Esta pregunta dio pie a la presentación y discusión de tres trayectos que se comentan en seguida. El primero de ellos es un trayecto donde azarosamente predominan restas y divisiones.

Sorprendentemente, Juan David señaló haber obtenido 97.59 siguiendo las operaciones mostradas en la figura 3 (siendo este un puntaje menor que el inicial, aunque resultado de cálculos erróneos, como se verá después).

En este trayecto se observa una combinación de restas y divisiones y sólo una multiplicación. Se preguntó a los niños por qué consideraban que el resultado de Juan David era menor que los 100 puntos con los que había iniciado y se recibieron comentarios sobre la resta y la división:

Michelle: *Porque también tenía que restar.*

Con ello se hacía referencia a que, en el recorrido seleccionado por Juan David, había dos restas y consideraban que la elección de esas operaciones había provocado la disminución del puntaje inicial.

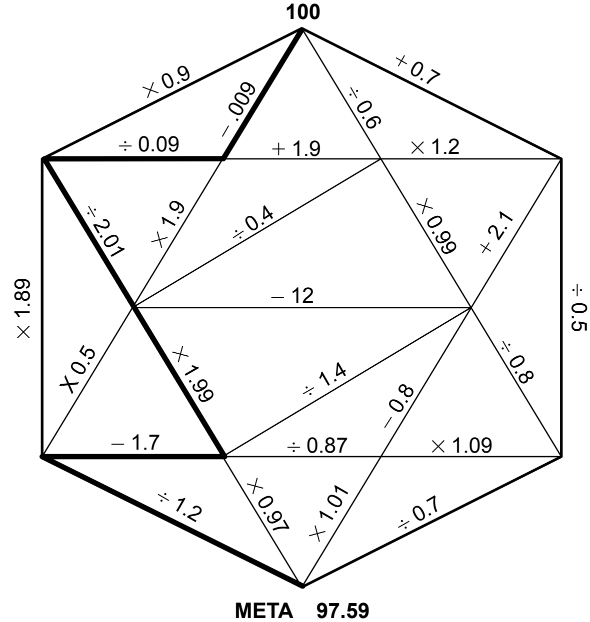


Figura 3. Trayecto y resultado de Juan David

Profesora: *Michelle dice que a lo mejor porque utilizó aquí* (señala el trayecto) *una operación que era de resta. ¿Por qué más? En todo el recorrido que Juan David hizo hay dos operaciones de resta* (las señala en el trayecto marcado).

La consideración de los efectos de la división se hizo visible en comentarios como los siguientes:

José Eduardo: *Hay tres divisiones y sólo una multiplicación.*
Profesora: *¿Y qué tiene que ver que haya elegido tres divisiones?*
Christian: *Con la división se parte* (el número) *en partes iguales.*
Janeth: *Sí, en partes iguales.*
Profesora: *Cuando divido, ¿qué le pasa al número?*
Christian: *Se divide en partes iguales.*
Profesora: *Al final, entonces, ¿cómo es mi resultado?*
Janeth y Christian: (Al final) *es* (un número) *más pequeño.*

> Profesora: *¿Siempre que divido me da un número más pequeño?*
> Alumnos: *No.*
> Nadia: *No, porque si divido y luego sumo, a lo mejor me puede dar más.*

En estas argumentaciones se muestran las ideas de los alumnos sobre los efectos de cada operación: cuando se hacen restas y divisiones, estas harán más pequeño el número de partida, es decir, asocian la resta con quitar elementos de un conjunto y la división con subdividirlo en partes más pequeñas, obteniendo en ambos casos como resultado conjuntos con menor número de elementos que en el conjunto de partida.

El asombro al percatarse de que algunas divisiones agrandan el número de partida y dificultades para explicar el hecho

Se verificó con la calculadora que el resultado de Juan David fuera correcto y se encontró que el resultado que obtuvo (97.59) no correspondía a la secuencia de operaciones seleccionadas, sino que el correcto era 1 097.6485 (figura 4).

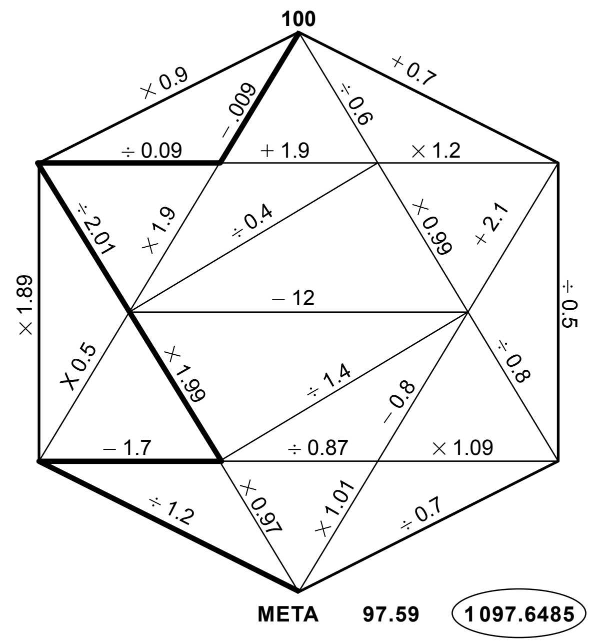


Figura 4.
Resultados de Juan David

La revisión de este resultado dio pie a comentarios interesantes respecto de los efectos de las operaciones:

Profesora: *Todos con su calculadora vamos a verificar que el resultado de su compañero Juan David sea correcto. Empezó con 100 puntos, después ¿qué hizo?*
Eduardo: *Restó 0.09.*
Michelle: *Le quedaron 99.91.*
Alumnos: [...] *Dividimos el 99.91 entre 0.09.*
Profesora: *¿Y cuánto salió?*
Alumnos: *¡1 110!* (asombrados).
Pedro (a un compañero): *¡Salió más!*
Profesora: *¿Cuánto le dio?*
Alumnos: *¡Mil ciento diez!* (sorprendidos)
Profesora: *¿Y luego qué hizo?*
Alumnos: *Dividió entre 2.01* (y siguen haciendo conjuntamente los cálculos restantes, el resultado en esta ocasión es 1 097.6...).
Profesora: *¿Sí es este el resultado?* (señala el 97.59 en el laberinto).
Alumnos: *¡No!*
Karla Janeth: *¡No, le salió un montón!* (sorprendida)
Profesora: *¿Cuánto* salió*?*
Alumnos: *¡1 097.6485!* (continúan asombrados)

Una vez que se observó que el resultado correcto era mayor que los 100 puntos de inicio, la profesora pregunta a los estudiantes: "*¿Por qué creen que se obtuvo un número mayor que 1 000 si se realizaron en su mayoría restas y divisiones y antes comentaron que, al efectuar esas operaciones, el número resultante siempre es menor que el número inicial?*" Como respuesta inicial se obtuvieron comentarios como los siguientes:

Profesora: *¿Por qué el número "se agrandó" si se hicieron restas y divisiones?*
Luis: *¿Por sumar mal?*
Nadia: *Por los décimos, centésimos y milésimos que tienen esas operaciones, por eso a lo mejor le salió más.*

Los argumentos mostraban la persistencia de las ideas iniciales, puesto que se buscaban pruebas alternas para justificar el hecho de que la división podría agrandar al número. Entonces, la profesora decide confrontar a los niños con los resultados de las operaciones.

Profesora: *¿Sí me puede salir más de mil si utilizo divisiones y restas?*
Alumnos: *Sí.*
Profesora: *¿Por qué?*
Nadia: *Porque ahí le salió más de mil.*
Profesora: *Pero, ¿por qué le salió más de mil?*
Nadia: *¡Por inteligente!*
(Risas)

Hasta este momento, como se ve en el intercambio, los niños estaban lejos de tener claridad sobre las razones que modifican los efectos de multiplicar y dividir con decimales, aunque de alguna manera ya habían intuido que ¡la división puede agrandar!

Un trayecto compuesto de sumas y multiplicaciones

Luis Ángel, quien obtuvo un puntaje de 450.15, presenta en el pizarrón el recorrido que siguió en la actividad inicial (figura 5) y verificó que su resultado

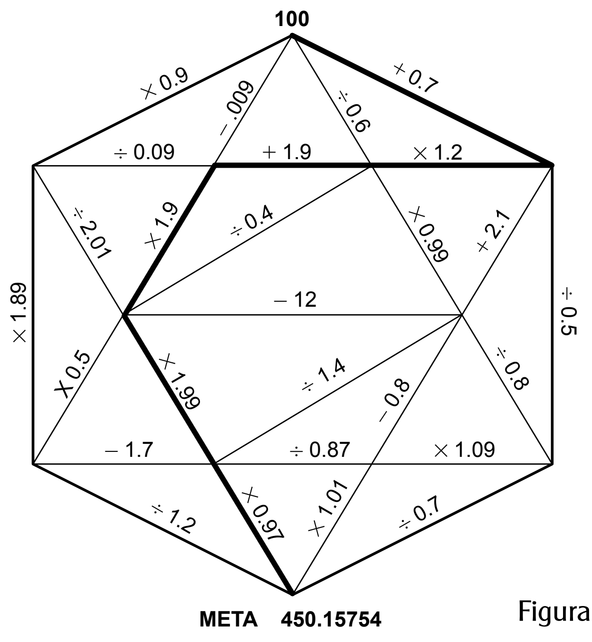


Figura 5. Resultado de Luis Ángel

fuera correcto. El recorrido de este estudiante estaba compuesto por sumas y multiplicaciones. Justificó esta composición de la siguiente manera:

Luis Ángel: *Porque tiene más sumas y multiplicaciones... porque si restaba me podría dar menos de 100... y si dividía tal vez sería más pérdida.*

En este comentario (referido al laberinto trazado en la primera fase de la sesión), se reitera la idea de que multiplicar necesariamente agranda los números de partida y que, al dividir, necesariamente el resultado (el cociente) será menor que el dividendo. Pero la profesora destacó que a pesar de que Luis Ángel había seleccionado solamente sumas y multiplicaciones, el resultado obtenido fue menor que el de Juan David que, en su recorrido, incluyó restas y divisiones.

Hugo, quien obtuvo el puntaje 6 011.87544 (figura 6), esto es, mucho mayor que el número fijado como objetivo, ante a la pregunta de la maestra dijo:

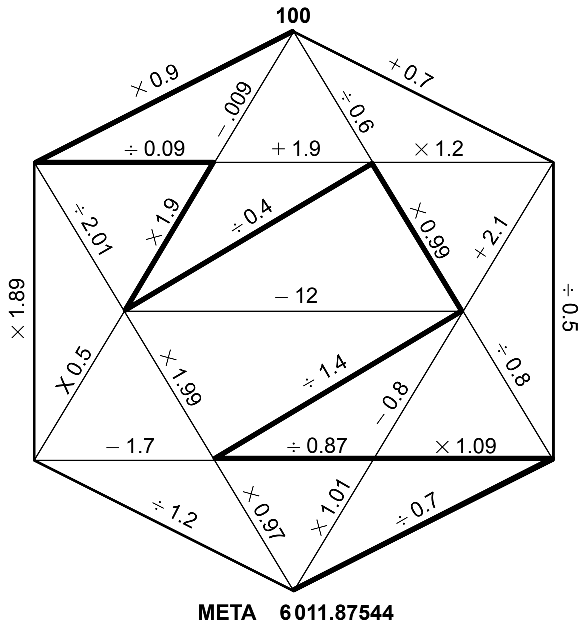


Figura 6. Resultado de Hugo

Hugo: *Yo fui haciendo las operaciones desde el principio y fue que me salió ese número.*

Este alumno no siguió las indicaciones dadas para realizar la actividad (lo cual le gana exclamaciones y acusaciones de haber hecho trampa). En vez de eso, fue realizando las operaciones y seleccionando así el trayecto que aumentaba su puntaje. El camino marcado incluía únicamente multiplicaciones y divisiones –aunque al parecer sin una reflexión acerca de la magnitud de los resultados producidos por estas operaciones– así que la profesora preguntó al grupo:

Profesora: *Él utilizó sólo multiplicaciones y divisiones, ¿por qué le habrá dado un resultado más grande, incluso mayor que mil?*

Y surgieron comentarios en general todavía anclados al *síndrome* MADA:

Nadia: *¿Por las multiplicaciones?*

Profesora: *¿A qué debimos prestar atención para obtener un número más grande?*

Pedro: *En las divisiones*

Luis Ángel: *...o a las cantidades.*

Karen: *En las divisiones no, porque yo hice uno con puras divisiones y no me sale.*

Posteriormente la profesora propuso verificar que el resultado fuera correcto, anotando los resultados después de cada operación para identificar las que llevaban a obtener un número mayor (figura 7).

Hacia la construcción de una nueva regla

Luis Ángel había explicado que eligió el camino de sumas y multiplicaciones porque consideraba que estas operaciones "agrandarían el resultado", mientras que las divisiones "implicarían pérdida". La profesora retoma la idea para hacer notar el efecto contrario: en el trayecto elegido por Hugo, al multiplicar 100 por 0.9, el resultado era menor que el inicial, es decir, 90, y al dividir 90 entre 0.09, el resultado se había hecho mayor que 1 000, contrario a lo que se esperaba que sucediera por haber efectuado esas operaciones:

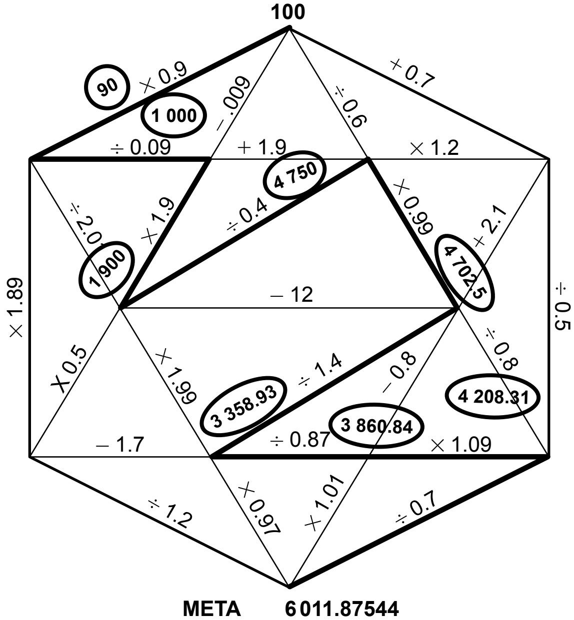


Figura 7. Cálculos parciales en el trayecto determinado por Hugo

Profesora: (Después de hacer cada una de las operaciones) *Pero hace rato su compañero Hugo dijo que él no escogió divisiones porque el número se iba a hacer más chiquito, pero miren, aquí tenía 100, multiplicó por 0.9 ¿y qué le dio?*

Alumnos: *90.*

Profesora: *¿Y por qué le dio noventa* (si hizo una multiplicación)*?*

Nadia: *Porque fue por decimal… sí, por decimal y no por entero*[5]

Profesora: *Y fíjense aquí, tenía 90 y los dividió entre 0.09 ¿y qué pasó?, salió 1 000, ¿por qué?*

Nadia: *Por eso, porque igual era decimal.*

Profesora: *Entonces, ¿la multiplicación siempre hace el número más grande y la división más chiquito?*

Alumnos: *No/A veces* (varios al mismo tiempo).

[5] Nos parece que, cuando Nadia menciona los decimales en este episodio, se refiere a números menores que uno, "que no alcanzan a ser enteros", idea que reitera en su siguiente intervención (dos renglones adelante).

Janeth: *Puede dar lo mismo.*

Profesora: *A ver, ¿tú qué piensas?* (señala a Edith)

Edith: *No, depende de qué número* (es).

Profesora: *Veamos, aquí tenía 90* (señala el laberinto), *dividió* (entre 0.09) *y le salió 1 000, que sí es un número más grande..., pero aquí tenía 4 702.5* (señala otro segmento del laberinto) *y al dividir* (entre 1.4) *le dio un resultado de 3 358.9. ¿Por qué en ocasiones sale más y en otras sale menos?*

Una estudiante precisó la idea:

Michelle: *Es que multiplicó por un decimal*[6] (Michelle quiere decir número menor que 1) *y no por un entero... y la división pues igual por eso, porque igual era decimal* (de nuevo quiere decir número menor que 1).

En el diálogo precedente y en la participación de Michelle puede verse una nueva idea, aunque aún en ciernes: si un número se multiplica por otro que tenga números enteros, el resultado va a ser mayor, y si se multiplica por un número menor que la unidad, el resultado será menor que el número inicial, aunque la operación que se aplique sea la multiplicación. A la inversa con la división: dividir por un número menor que la unidad dará un cociente mayor que el dividendo.

Con la incorporación de estos comentarios, algunos estudiantes comenzaron a ganar claridad acerca de que la multiplicación no siempre agranda al número de partida y que la división no siempre lo hace más pequeño.

La sobregeneralización

En el contexto de generación de la nueva idea hay quien se va al extremo y hace sobre-generalizaciones, como la siguiente:

Guillermo: (Para hacer un camino que nos dé un resultado más grande) *podríamos pasar por todas las divisiones.*

[6] En este momento, conforme a las respuestas, nos parece que Michelle, al igual que Nadia, identifica los números decimales con aquellos que son menores que la unidad, pues contrapone el 0.09 (decimal) al 1.4 (no decimal o entero). Esto ocurre a pesar de que ya se habían trabajado diversos aspectos de dichos números a lo largo de la secuencia.

A la búsqueda de apoyo para la nueva idea

Hasta ese momento, a excepción de algunos, los estudiantes no lograban comprender del todo cómo es que algunas divisiones hacían que el número inicial se agrandara, como sucedió al dividir 90 entre 0.09 (y se obtuvo 1 000), o cómo otras tenían como efecto que el número se hiciera más pequeño, como cuando se dividió 4 702.5 entre 1.4 y se obtuvo 3 860.84. Con la intención de aclarar las ideas, propusieron seguir un recorrido donde se consideraran sólo las divisiones (figura 8).

Al trazar el recorrido que sugirieron los estudiantes, el cual consistía en seleccionar la mayor cantidad posible de divisiones (bajo la nueva hipótesis de que, al dividir con decimales, el resultado siempre se agrandaría) y posteriormente realizar las operaciones y obtener como resultado 722.61, los alumnos observaron que no habían obtenido un resultado mayor que el anterior 6 011.87544. Este resultado creó confusiones momentáneas respecto a cuándo una multiplicación o división agrandan o achican un número, pero también

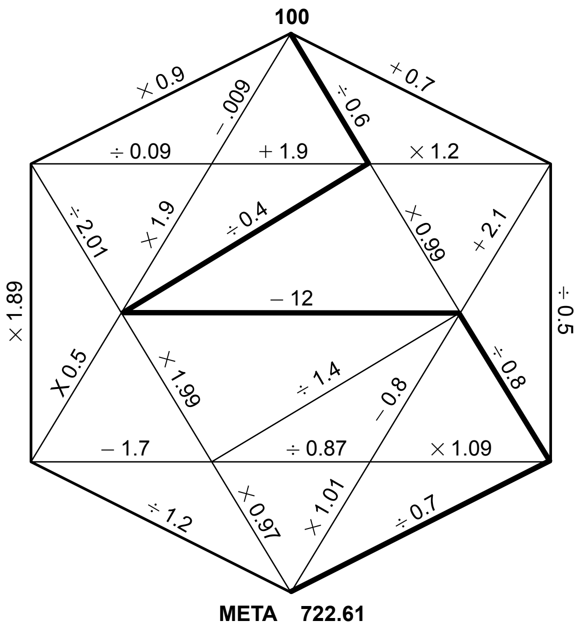


Figura 8. Recorrido sugerido por los estudiantes

causó interés de hacer nuevas búsquedas por parte de algunos alumnos que ahora están próximos a definir la regla de que dividir por un número menor que 1 da un resultado mayor que el número inicial y dividir por un número mayor que 1 da un número menor.

Profesora: *¿Qué pasa si yo divido un número, el que sea, entre un número decimal que sea menor que la unidad?*

Alumnos: *Vamos a comprobarlo.*

Profesora: *Por ejemplo, si divido 8 entre 0.03* (anota en el pizarrón), *¿qué pasa?*

Alumnos: *Se hace más grande.*

Nadia: *300.*

Alondra: *No, son 266.66.*

[...]

Profesora: *Si yo divido entre un número que también sea decimal pero que contenga enteros como 1.3* (8 entre 1.3), *¿cómo me va a dar la cantidad?*

Bryan: *No sabemos.*

Alumnos: *Más pequeña.*

Janeth: *Son 6 enteros...* (no puede leer la cantidad, así que pasa a escribirla en el pizarrón, 6.15384...)

Profesora: *Más pequeña, ¿y si multiplico por un número que no tenga enteros?*

Alumnos: *Va a ser más pequeña.*

Profesora: *¿Y si multiplico por un número que tenga enteros?*

Alumnos: *Más grande.*

La formulación de una regla: la magnitud del resultado depende del número por el que se multiplique o se divida

Finalmente, muchos de los alumnos llegaron a la conclusión de que, al dividir un número entre un decimal menor que 1, el resultado se agranda y que, cuando se divide entre un número que contenga enteros, el resultado será menor que el dividendo; contrario a lo que ocurre con la multiplicación donde, al multiplicar por un decimal menor que 1, el resultado "se achica" y, al multiplicar por un decimal que contenga enteros, el resultado será mayor que el número de partida.

Como culminación de la actividad, los estudiantes elaboraron con ayuda de la profesora la siguiente conclusión: al utilizar decimales, las operaciones no tienen una sola tendencia –multiplicación → aumentar y división → disminuir–, sino que su efecto depende del número por el que se multiplica o entre el que se divide: si es menor o mayor que 1.

DISCUSIÓN

Al iniciar la actividad en torno al *Laberinto de los decimales,* nos preguntamos lo siguiente:

a) Si los estudiantes participantes se acercarían a la multiplicación y división de decimales con la lógica de "la multiplicación siempre agranda y la división siempre achica".
b) En qué medida el *Laberinto de los decimales* sería útil para promover la reflexión sobre dichas ideas y favorecer su abandono.
c) En qué medida la interacción entre los compañeros, con la orientación y coordinación de alguien que sabe más, favorecería adicionalmente la comprensión de los efectos de multiplicar y dividir con decimales.

Al iniciar la experiencia, la gran mayoría de los estudiantes consideraba que, de acuerdo con los modelos más intuitivos sobre estas operaciones, al efectuar una multiplicación sobre cualquier número, este se agrandaría y daría por resultado un número mayor que el inicial y que, al realizar una división, el efecto sería necesariamente el contrario, es decir, el resultado de realizar una división siempre sería un número menor que el número inicial. Estas ideas fueron confrontadas a partir de la interacción con el *Laberinto de los decimales* mediante la introducción de cálculos en los que la división agrandaba al número de partida mientras que la multiplicación lo hacía más pequeño. Estos resultados, contrarios a los esperados por los alumnos, generaron confusiones y dudas temporales y provocaron que, durante el proceso, incluso algunos de ellos hicieran una sobregeneralización: en los decimales, las operaciones siempre tienen el efecto inverso al que tienen al operar con números naturales, es decir, la división con decimales siempre agrandará al número de partida y la multiplicación siempre lo hará menor.

A través de la definición de trayectos en el laberinto, la discusión grupal y el planteamiento de preguntas intencionadas por parte de la profesora, la mayoría de los estudiantes concluyó que tanto la división como la multiplicación pueden agrandar o reducir un número, dependiendo de las características de los números con los que se trabaje: si un número se multiplica por un decimal que contenga enteros, el resultado será mayor y, si el número por el que se multiplica es menor que la unidad, el resultado será menor. En la división, el efecto es el contrario; si el número entre el cual se divide es mayor que la unidad, el resultado (cociente) será menor que el dividendo y, si el número entre el cual se divide es menor que la unidad, el resultado (cociente) será mayor que el número inicial. Estas conclusiones, en nuestra opinión, constituyen un avance importante en la manera en que los estudiantes conceptualizan los efectos de las operaciones con decimales, pero llegar a este punto implicó pasar por varios momentos:

1. *La persistencia del modelo intuitivo:* la multiplicación agranda, la división achica.
2. *El número de operaciones cuenta:* el número de operaciones también es relevante para definir la magnitud del resultado, a mayor número de sumas y multiplicaciones realizadas, mayor es el resultado.
3. *El asombro:* al percatarse de que algunas divisiones agrandan el número y algunas multiplicaciones lo achican.
4. *La sobregeneralización:* en los decimales, las operaciones siempre tienen el efecto inverso al que tienen al operar con números naturales, la división siempre agranda, la multiplicación siempre achica.
5. *El efecto depende de los números por los que se multiplica o divide*: si se divide por un número menor que 1, el resultado se agranda, si se multiplica por un número menor que 1, el resultado se achica.

Pero las ideas iniciales, válidas en el campo de los naturales, no resultan fáciles de modificar, es decir, que el s*índrome MADA* no desaparece de un plumazo. Al finalizar la sesión de trabajo con el *Laberinto de los decimales*, poco más de la mitad de los participantes en la experiencia logró analizar los números involucrados en una multiplicación y en una división en el sentido de determinar correctamente con cuáles se obtendrá un resultado mayor que el número inicial. En otras palabras, estos niños mostraron que, al menos en ese momento, el *síndrome MADA* se desvanecía. Pero en el resto de los estudiantes permanecían dudas respecto de cuándo la multiplicación agranda y cuándo la división achica.

Como quiera que sea, conviene destacar el hecho de que el *Laberinto* fue un recurso útil para contribuir a superar el *síndrome MADA* y que este recurso tiene bondades importantes porque: *a)* incluye multiplicaciones y divisiones que "agrandan" y "achican" y, con ello, los estudiantes entran en contacto con resultados que ponen en conflicto sus ideas previas; *b)* descarga de la pesada tarea de hacer los cálculos al permitir el uso de la calculadora; *c)* motiva a realizar la actividad, no sólo por ser un juego, sino porque hay una confrontación permanente entre resultados esperados y resultados obtenidos que provoca un desafío intelectual. Sin embargo, y siguiendo nuestras preguntas iniciales, es posible decir que no son suficientes estas bondades para asegurar el logro de los objetivos planteados; para ello, se hace indispensable la participación de un o una docente con suficientes conocimientos matemáticos y pedagógicos del contenido (los decimales) y con capacidad de coordinar las actividades y formular las preguntas pertinentes en el momento oportuno.

REFLEXIONES FINALES

Sin duda, los números decimales y sus operaciones son un campo complejo que resulta un desafío enseñar y aprender de manera significativa y funcional. Para el caso específico de las ideas sobre la multiplicación y la división con estos números, hemos constatado la utilidad de presentar a los estudiantes una situación donde se pone en duda la idea de que, al efectuar una multiplicación, el resultado de esta siempre es mayor que el número inicial, y que la división no siempre da como resultado un número menor que el dividendo, promoviendo entre los estudiantes el análisis de los números involucrados en las operaciones.

Asimismo, se constatan las bondades de la interacción entre los alumnos con la guía adecuada de un profesor que conozca bien la problemática motivo de la interacción.

Con situaciones como esta, se podrá propiciar en los estudiantes la diferenciación de los efectos de operar con dichos números, rompiendo con la idea de que los números decimales son solamente una extensión de los naturales, motivo por el cual se utilizan según las mismas reglas. También es relevante considerar que las situaciones en sí mismas no pueden tener la potencia didáctica que se logra con una buena gestión de la actividad y la promoción de una socialización y confrontación de las respuestas, teniendo en mente a dónde se quiere llegar. Es decir, se hace indispensable un buen conocimiento matemático y didáctico por parte del profesor para que situaciones como el *Laberinto de los decimales* rindan el fruto que teóricamente se espera de ellas.

Este escrito, además de comunicar lo ocurrido en la interacción con el *Laberinto de los decimales*, también quiere llamar la atención hacia el hecho, ya señalado por varios investigadores (Brown, 1981; Barriendos, 2013; Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Maza, 1991), de que las ideas erróneas sobre los efectos de multiplicar y dividir con decimales, cuyo tratamiento didáctico hasta hoy se omite en las escuelas, afecta a la elección de la o las operaciones que permiten resolver un problema que involucra decimales, cuestión por demás importante en la formación matemática de los estudiantes y en la capacidad de utilizar funcionalmente los conocimientos adquiridos en la escuela.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ávila, Alicia (2008), "Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible", *Educación Matemática*, vol. 20, núm. 2, pp. 5-33.

——— (2013), "Conocimientos en construcción sobre los números decimales: los resultados de un acercamiento conceptual", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* vol. 18, pp. 29-59.

Ávila, Alicia y Silvia García (2008), *Los decimales: más que una escritura,* México, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.

Barriendos, Ana (2013), "La multiplicación achica y la división agranda. Cuando los decimales contradicen la experiencia", ponencia presentada en el XII Congreso Nacional de Investigación Educativa, Guanajuato, México, noviembre de 2013. Disponible en www.comie.org.mx

Broitman, Claudia, Horacio Itzcovich y María Emilia, Quaranta (2003), "La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 6, núm. 1, pp. 5-26.

Brousseau, Guy (1986), *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Tesis de Doctorado de Estado, Universidad de Bordeaux I, Francia.

——— (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La pensée Sauvage.

Brown, Margaret (1981), "Place value and decimals", en K. M. Hart (editor general), *Children Understanding of Mathematics*, Inglaterra, Anthony Rowe Publishing Services, pp. 11-16 y 48-66.

Centeno, Julia (1997), *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?*, Madrid, Síntesis.

Fischbein, E., M. Deri, M. Nello y M. S. Marino (1985), "The role of implicits models in solving verbal problems in multiplication and division", *Journal for Research in Mathematics Education,* vol. 16, núm. 1, pp. 3-17.

Graeber, Ana, Dina Tirosh y Rosseane Glover (1989), "Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 95-102.
Konic, P., J. Godino y M. Rivas (2010), "Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto", *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, vol. 74, julio, pp. 57-74.
Maza, Carlos (1991), "Preconceptos erróneos en multiplicación y división entre futuros profesores", *Infancia y aprendizaje*, vol. 56, pp. 93-103.
NCTM (2008), *Maze playing board*. Disponible en http://illuminations.nctm.org, consultada el 14 de octubre de 2013.
Peterson, John y Joseph Hashisaki (1969), *Teoría de la aritmética*, México, Limusa
Resnick, L., P. Nesher, F. Leonard, M. Magone, S. Omanson e I. Peled (1989), "Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 20, núm. 1, pp. 8-27.
Roditi, Éric (2007), "La comparaison des nombres décimaux. Conception et expérimentation d´une aide aux élèves en difficulté", *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 12, pp. 55-81.
Saiz, Irma, Edith Gorostegui y Diego Vilotta (2011), "Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza; entre las expresiones decimales y los números decimales", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, pp. 123-151.
Valencia, Evelyn (2014), *Secuencia de enseñanza de los números decimales basada en un diagnóstico de las dificultades de comprensión de estos números*, Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo, Universidad Pedagógica Nacional, México.
Van Galen, F., E. Feijs, N. Figueiredo, K. Gravemeijer, E. Van Herpen y R. Keijzer (2008), *Fractions, Percentages, Decimals and Proportions. A Learning-Teaching Trajectory for Grade 4, 5 and 6*, Países Bajos, Sense Publishers.

DATOS DE LAS AUTORAS

Evelyn Valencia
Universidad Pedagógica Nacional, México
vm_evy@hotmail.com

Alicia Ávila
Universidad Pedagógica Nacional, México
aliavi@prodigy.net.mx

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Actitudes hacia la estadística de estudiantes universitarios de Colombia

Luis Eduardo Pérez Laverde, Ana Sofía Aparicio Pereda, Jorge Luis Bazán Guzmán y Oscar Jõao Abdounur

Resumen: Se analizan las actitudes hacia la estadística de los estudiantes colombianos de una universidad privada de Bogotá, los cuales comienzan en una disciplina de estadística. Para medir las actitudes, se consideran tres escalas: de Estrada (2002) (AEE), Cazorla y otros (1999) (AEC) y una escala conjunta basada en las dos.

La muestra final estuvo compuesta por 545 estudiantes de entre 17 y 25 años, 64.2% hombres, de nueve programas de las escuelas profesionales de Ciencias Exactas e Ingeniería, Ciencias Económicas y de la Escuela Internacional de Gestión y Marketing profesional. El análisis para la evaluación de la calidad de las escalas utilizadas muestra una alta fiabilidad de las escalas en la versión final de 23, 20 y 43 preguntas de la AEE, AEC y la escala global, respectivamente.

El análisis de las actitudes específicas muestra que los estudiantes reconocen la importancia de las estadísticas, tanto en el mundo académico como en la vida cotidiana; sin embargo, tienen desconfianza en relación con el uso, la capacidad requerida y el gusto por la disciplina que toman. También, se encontraron diferencias significativas ($p < 0.05$) de las actitudes medidas por las tres escalas según la escuela y los programas evaluados, pero no en relación con el género de los estudiantes. Mediante el uso de estas escalas, se pueden sugerir investigaciones futuras como complemento al enfoque didáctico de las acciones por considerar en la enseñanza de esta disciplina.

Palabras clave: escala de actitudes hacia la estadística, análisis de preguntas, fiabilidad, universitarios colombianos, didáctica de la estadística.

Fecha de recepción: 5 de septiembre de 2014; fecha de aprobación: 7 de agosto de 2015.

Attitudes towards statistics of university students from Colombia
Abstract: We analyze the attitudes towards Statistics of Colombian students of a private university in Bogotá, who begin in a discipline of Statistics. To measure the attitudes three scales are considered: Estrada (2002) (ASE), Cazorla *et al.* (1999) (ASC) and a conjoint scale based in both.

The final sample consisted of 545 students between 17 and 25 years, 64.2% male, of nine careers of the professional schools of Exact Sciences and Engineering, Economics and of the International School of Management and Marketing. The analysis for quality assessment of the scales used, shows high reliability of the final version of the scales with 23, 20 and 43 questions respectively to the ASE, ASC and Global scales.

The analysis of the specific attitudes show that students recognize the importance of statistics both in academia and in everyday life; however, have distrust in relation to use, ability required and taste for the discipline that they take. Also, wer found significant differences ($p < 0.05$) of the attitudes measured by the three scales by school and careers evaluated, but not in relation to the gender of the students. Through the use of these scales, future investigations are suggested as complement to the didactic approach of actions to be considered in the teaching of this discipline.

Keywords: scale, attitudes toward statistics, item analysis, reliability, Colombian students, teaching of statistics.

1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los programas universitarios está incluida la disciplina de Estadística como parte de la formación básica de los estudiantes. Esto se debe a la relación de la estadística con la investigación técnica y científica de los futuros profesionales. Sin embargo, la falta de un desempeño adecuado en esta disciplina es un hecho recurrente (especialmente en las áreas de ciencias humanas). Este hecho genera preocupación desde una perspectiva de la investigación en educación estadística y en particular algunos autores, señalados más adelante, han apuntado que las actitudes hacia la estadística pueden ser importantes para explicar este mal desempeño observado.

La investigación de las actitudes hacia la estadística en poblaciones universitarias de diversas especialidades o programas ha venido cobrando fuerza en los últimos años. Podemos citar los estudios de Darías (2000), Blanco (2008), Modéjar, Vargas y Bayot (2008), Escalante (2010), Rodríguez (2011), Tejero y Castro (2011), y Tarazona, Bazán y Aparicio (2013), entre otros. Estas investigaciones buscan tener más alcance acerca de lo que los universitarios sienten y su manera de reaccionar frente a la disciplina de estadística, proporcionando, a partir de sus hallazgos, propuestas tanto de instrumentos (escalas o cuestionarios) para medir las actitudes que sean válidos y confiables como de diseños de estrategias dirigidas a mejorar el aprendizaje de los estudiantes.

Así, como se menciona en Blanco (2008, p. 312), existen diferentes investigaciones que han venido informando sobre las reacciones emocionales, las actitudes y creencias negativas hacia la estadística de alumnos universitarios con escaso interés hacia el área y una formación cuantitativa previa limitada. Estos factores pueden bloquear muchas veces el rendimiento y el interés por la estadística.

Es sabido que las actitudes negativas pueden predisponer o condicionar tanto a alumnos como a docentes a aprendizajes inadecuados. Investigaciones como las de Phillips (1993), Agne, Greenwood y Miller (1994), Bazán (2006) y Gómez (2000, 2009) aseguran que existen relaciones entre las actitudes, las creencias del profesor y su rendimiento y también entre las actitudes, creencias y el desempeño de sus alumnos. Esta preocupación por el estudio de las actitudes se refleja en las diversas escalas de actitudes hacia la estadística que han sido propuestas para medir adecuadamente dicha variable (véase Carmona, 2004, pp. 5-28).

Así, Estrada (2002) propuso y elaboró una escala de actitudes hacia la estadística, que se denomina aquí como Actitudes Estadística de Estrada (AEE), dirigida inicialmente para profesores en ejercicio y formación validada en España y Perú, pero que también ha sido validada para estudiantes universitarios en el Perú por Aliaga (2009) y Tarazona y otros (2013).

Por otro lado, Cazorla, Silva, Vendramini y Brito (1999) hicieron una adaptación de la escala de actitudes hacia la matemática de Brito (1998) con el propósito de medir las actitudes hacia la estadística en estudiantes universitarios de diferentes especialidades en el Brasil. La escala de Actitudes Estadística de Cazorla y otros (1999), denominada aquí como AEC, ha sido ampliamente utilizada en estudios sobre la actitud hacia la estadística en el Brasil en muestras de universitarios, profesores universitarios y estudiantes de los últimos años de secundaria, como los informados en Bonafé y otros (2010), Evangelista y Arno (2012), y Oliveira (2011). También en el Perú, en estudiantes universitarios de ciencias naturales, matemáticas y educación secundaria por Aliaga (2009) y por

Tarazona y otros (2013) en universitarios de mediana edad, denominados así en el Perú, a los grupos de ingresantes mayores de 40 años. Otros casos de aplicación de las escalas AEE y AEC en Perú son Aparicio, Bazán y Abdounur (2004), Aparicio y Bazán (2006, 2008) en profesores en ejercicio.

En general, los estudios acerca de las escalas de actitudes han mostrado indicadores de la calidad de las escalas como instrumentos psicométricos, es decir, como medidas para evaluar las actitudes para sus respectivas poblaciones. Sin embargo, en el caso de Colombia, poco se conoce acerca de la idoneidad de estas escalas, especialmente para el caso de estudiantes universitarios. No hay muchos estudios que hayan tratado el tema de actitudes hacia la estadística en Colombia. Hasta el momento, hemos identificado solamente el trabajo presentado por Zapata y Rocha (2011) que estudia las relaciones entre formación y actitudes hacia la estadística en profesores de escuela primaria y secundaria en Colombia, donde se hizo uso de la escala SATS de Schau y otros (1995), pero no hemos identificado ninguna investigación que considere las escalas AEE y/o AEC.

En contraste, existe una cierta tradición de evaluación de las actitudes hacia la matemática. Por ejemplo, Pérez (2008) presenta los resultados de una investigación realizada en estudiantes universitarios de Colombia en la que se adapta una escala de actitud hacia la matemática y se estudia la relación entre las puntuaciones obtenidas en la escala de actitudes hacia la disciplina con las notas al final del semestre académico de cada estudiante. También Pérez, Niño y Páez (2010) informan resultados de investigación desarrollada en dos colegios, uno urbano y una escuela rural, acerca del desarrollo de aptitudes matemáticas en estudiantes de undécimo grado y su relación con los ambientes escolares, teniendo como herramientas una encuesta de caracterización poblacional y un test de rendimiento óptimo.

El presente estudio tiene como objetivo estudiar las actitudes hacia la estadística de una muestra de universitarios colombianos de una universidad privada de la ciudad de Bogotá en tres de sus escuelas: Internacional de Administración y Marketing, Ciencias Exactas e Ingeniería y Economía, considerando las versiones adaptadas de las escalas de actitudes a la estadística de Cazorla y otros (1999), de Estrada (2002) y de una versión conjunta luego de la evaluación de su calidad para medir dicha actitud en la muestra bajo estudio.

El presente artículo está organizado de la siguiente manera. En el apartado 2 se presenta la metodología del estudio, en la cual se describen las escalas para medir las actitudes hacia la estadística en él consideradas, la población que va a ser estudiada, así como los criterios de inclusión y exclusión para elegirla, los procedimientos de aplicación de las escalas y los análisis estadísticos para evaluar su calidad, y los procedimientos para el análisis de los resultados de las actitudes encontradas luego de la evaluación de la calidad de las escalas. En el apartado 3, se presentan los diferentes resultados de la evaluación de la calidad de las escalas para medir las actitudes, los cuales se apoyan fuertemente en análisis de carácter psicométrico (véase por ejemplo Pasquali, 2003). Asimismo, se presentan los resultados del análisis de las actitudes hacia la estadística en la población efectiva considerada, tanto en forma general como atendiendo a comparaciones por género, escuela y programa profesional al cual pertenecen los estudiantes evaluados.

Finalmente, en el apartado 4 se presentan los comentarios finales acerca de los resultados obtenidos en este estudio y sugerencias acerca de investigaciones futuras que pueden derivarse de ellos.

2. METODOLOGÍA

2.1 Escalas para medir las actitudes hacia la estadística

Escala de actitudes hacia la estadística de Estrada (2002): AEE

De acuerdo con Estrada (2002), la Escala AEE fue elaborada a partir de la combinación de tres escalas: escala SAS (Roberts y Bilderback, 1980); escala ATS (Wise, 1985) y escala de Auzmendi (1992), consideradas internacionalmente como las más usadas. Como lo señala la autora, a partir de las escalas citadas se elaboró un primer listado de preguntas y se realizó una selección que contempla diferentes componentes pedagógicos y antropológicos y, dando un peso equivalente a cada uno, se intentó incluir tanto preguntas redactadas en forma afirmativa (Ej. ítem 5: "Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana") como otras en forma negativa (Ej. ítem 21: "La estadística no sirve para nada").

En la escala AEE las preguntas constan de un enunciado y una escala de cinco puntos que valoran las respuestas desde "totalmente en desacuerdo" (1 punto) hasta "totalmente de acuerdo" (5 puntos). Está compuesta por 25 preguntas, 14 de actitudes positivas (preguntas 2, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 22, 24) frente a 11 de actitudes negativas (preguntas 1, 3, 6, 9, 11, 14, 15, 19, 21, 23, 25). Para el análisis de la actitud total de la escala, las preguntas negativas reciben una calificación inversa desde "totalmente en desacuerdo" (5 puntos) hasta "totalmente de acuerdo" (1 punto) para que puntajes altos en la escala reflejen actitudes positivas hacia la estadística. De esta manera, la puntuación total en actitudes será la suma de las respuestas de todas las preguntas, y representará la actitud de cada encuestado respecto a la estadística.

La AEE presenta una confiabilidad alfa de Cronbach de 0.77 en una muestra de 140 profesores españoles de educación básica (Estrada, 2002). Análisis posteriores de la AEE como los de Estrada y otros (2003, 2004), Estrada y Batanero (2008), Estrada y otros (2010, 2013), Aparicio y otros (2004), Aparicio y Bazán (2006), Aliaga (2009) y Tarazona y otros (2013) muestran una adecuada confiabilidad y validez de la escala.

Escala de actitudes hacia la estadística de Cazorla y otros (1999): AEC

La escala AEC fue adaptada por Cazorla y otros (1999) y Brito y Vendramini (2001) a partir de una escala de actitudes en relación con las matemáticas creada por Aiken (1974) y traducida y adaptada para el portugués por Brito (1998). Es una escala de tipo Likert compuesta por 20 preguntas, 10 preguntas de actitudes positivas (3, 4, 5, 9, 11, 14, 15, 18, 19, 20) frente a 10 preguntas de actitudes negativas (preguntas 1, 2, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 16, 17). Originalmente, cada ítem presenta cuatro posibilidades de respuestas: totalmente en desacuerdo, en desacuerdo, y de acuerdo totalmente de acuerdo, que reciben una puntuación de 1 a 4, respectivamente, para las preguntas positivas, y los pesos se invierten para el caso de las preguntas negativas. En el presente estudio se agregó la opción de respuesta Indiferente para que resultara equivalente a la escala AEE. Al igual que en el caso de la AEE, las preguntas negativas fueron recodificadas para obtener un puntaje total de la actitud hacia la estadística medida por esta escala.

Esta propuesta fue originalmente probada por Aparicio y otros (2004), Aparicio y Bazán (2006), Aliaga (2009) y Tarazona y otros (2013), entre otros.

Cazorla y otros (1999) informan una confiabilidad de 0.94, al considerar una muestra de 1 154 de 15 cursos de graduación de algunas universidades particulares en Brasil. Análisis posteriores de la AEC, como los de Aparicio y otros (2004), Aparicio y Bazán (2006), Aliaga (2009), Tarazona y otros (2013), muestran una excelente confiabilidad y validez de la escala.

Escala de actitudes hacia la estadística global

Esta escala es una propuesta introducida por Aparicio y otros (2004) en la que se suman los puntajes de las escalas AEE y AEC. Esta escala también ha sido analizada por Aliaga (2009) y Tarazona y otros (2013).

2.2 Población y muestra efectiva

Para el presente estudio, se eligió la Universidad Sergio Arboleda al considerar que tiene una cierta tradición de investigación en temas relacionados con el estudio de actitudes de sus estudiantes (Pérez y Páez, 2010; Pérez, 2008), así como la facilidad que se nos dio para el desarrollo de la presente investigación.

En el año 2013, esta universidad contaba con siete escuelas que agrupan 20 programas profesionales como puede verse en el cuadro 1. De estos, 14 programas profesionales pertenecientes a tres escuelas cuentan en sus planes de estudio con dos cursos de estadística como parte de su formación general. Así, la población objetivo del estudio fueron los estudiantes de los programas profesionales de las escuelas profesionales de Economía, Ciencias Exactas e Ingeniería y la Escuela Internacional de Administración y Marketing con excepción de Matemática. De esta manera, no fueron considerados en este estudio estudiantes de las Escuelas de Comunicación Social y Periodismo, Filosofía y Humanidades, Política y Relaciones Internacionales y Derecho por no contar en sus planes de estudio la asignatura de Estadística.

Los estudiantes del programa de Matemática fueron excluidos porque el objetivo principal era considerar el estudio de las actitudes hacia la estadística de los alumnos que llevaran cursos de estadística como cursos complementarios en su formación, el cual no es el caso del programa de Matemática.

La muestra final estuvo formada por nueve programas profesionales, ya que, por criterios de inclusión y exclusión (explicados más adelante), se eliminaron participantes de algunos programas como Administración de Negocios, Administración Ambiental, Comercio Internacional y Logística Empresarial.

Adicionalmente, para definir con más especificidad la población objetivo, se consideraron algunos criterios de inclusión y exclusión para definir a los estudiantes que participarían en el estudio de los programas profesionales previamente definidos.

Cuadro 1. Escuelas y programas profesionales en la universidad de estudio y programas considerados en el estudio

Escuela	Programas	Tienen un curso de estadística	Participa en el estudio
Internacional de Administración y Marketing (EIAM)	Administración de Empresas	Sí	Sí
	Administración de Negocios	Sí	No
	Administración Ambiental	Sí	No
	Comercio Internacional	Sí	No
	Finanzas y Comercio Exterior	Sí	Sí
	Contaduría Pública	Sí	Sí
	Logística Empresarial	Sí	No
	Marketing y Negocios Internacionales	Sí	Sí
Ciencias Exactas e Ingeniería	Ingeniería Ambiental	Sí	Sí
	Ingeniería Industrial	Sí	Sí
	Ingeniería Electrónica	Sí	Sí
	Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones	Sí	Sí
	Matemáticas	Sí	No
Comunicación Social y Periodismo	Comunicación Social	No	No
	Publicidad Internacional	No	No
Filosofía y Humanidades	Filosofía y Humanidades	No	No
	Licenciatura Filosofía y Humanidades	No	No
Política y Relaciones Internacionales	Política y Relaciones Internacionales	No	No
Economía	Economía	Sí	Sí
Derecho	Derecho	No	No

Criterios de inclusión:

- Estudiantes que ingresan a primer semestre académico o que aún no han tomado la asignatura de estadística.

Criterios de exclusión:

- Estudiantes que dejaron sin respuesta más de cinco preguntas de la escala completa que incluye AEE y AEC.
- Estudiantes que ya cursaron un curso de estadística.

Considerando el criterio de inclusión, el cuadro 2 presenta la población objetivo para cada programa profesional. Adicionalmente, considerando los criterios de exclusión, presentamos la población efectiva, así como el porcentaje de cobertura alcanzado para las diferentes escuelas y programas considerados.

En el cuadro 2 se puede apreciar que se evaluó inicialmente una población total de 700 alumnos, de los cuales 545 estudiantes quedaron como una población efectiva. Esta población se distribuyó finalmente en nueve programas. Los evaluados no habían cursado aún ninguna disciplina de estadística de nivel de educación superior.

En el cuadro 3, se puede observar que el mayor porcentaje es de sexo masculino (64.2%). Además, se puede ver que la mayoría de evaluados está ubicado en la Escuela Internacional de Administración y Marketing (267) y el menor número es de Economía (59). Adicionalmente, presentamos la distribución en porcentaje por cada programa en la figura 1, donde se aprecia que el mayor número de estudiantes corresponde al programa de Ingeniería Industrial

Cuadro 2. Población efectiva y porcentaje de cobertura del estudio

<table>
<tr><th>Escuela</th><th>Programa</th><th>Población objetivo</th><th>Población efectiva</th><th>% de cobertura</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Internacional de Administración y Marketing</td><td>Administración de Empresas</td><td>82</td><td>70</td><td>85.37</td></tr>
<tr><td>Contaduría Pública</td><td>73</td><td>47</td><td>64.83</td></tr>
<tr><td>Finanzas y Comercio Exterior</td><td>85</td><td>64</td><td>75.29</td></tr>
<tr><td>Marketing y Negocios Internacionales</td><td>109</td><td>86</td><td>78.90</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Ciencias Exactas e Ingeniería</td><td>Ingeniería Ambiental</td><td>34</td><td>29</td><td>85.29</td></tr>
<tr><td>Ingeniería Industrial</td><td>121</td><td>97</td><td>80.17</td></tr>
<tr><td>Ingeniería Electrónica</td><td>48</td><td>35</td><td>72.92</td></tr>
<tr><td>Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones</td><td>72</td><td>58</td><td>80.56</td></tr>
<tr><td>Economía</td><td>Economía</td><td>76</td><td>59</td><td>77.63</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td>700</td><td>545</td><td></td></tr>
</table>

Cuadro 3. Distribución de la muestra efectiva por programa según género (N = 545)

Escuela	Programa	Masculino		Femenino		Total	
		N	%	N	%	N	%
Internacional de Administración y Marketing (N = 267)	Administración de Empresas	44	8.1	26	4.8	70	1.8
	Contaduría Pública	28	5.1	19	3.5	47	8.6
	Finanzas y Comercio Exterior	32	5.9	32	5.9	64	11.7
	Marketing y Negocios Internacionales	46	8.4	40	7.3	86	15.8
Ciencias Exactas e Ingeniería (N = 219)	Ingeniería Ambiental	16	2.9	13	2.4	29	5.3
	Ingeniería Industrial	64	11.7	33	6.1	97	17.8
	Ingeniería Electrónica	31	5.7	4	0.7	35	6.4
	Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones	49	9.0	9	1.7	58	10.6
Economía (N = 59)	Economía	40	7.3	19	3.5	59	10.8
Total		350	64.2	195	35.8	545	100.0

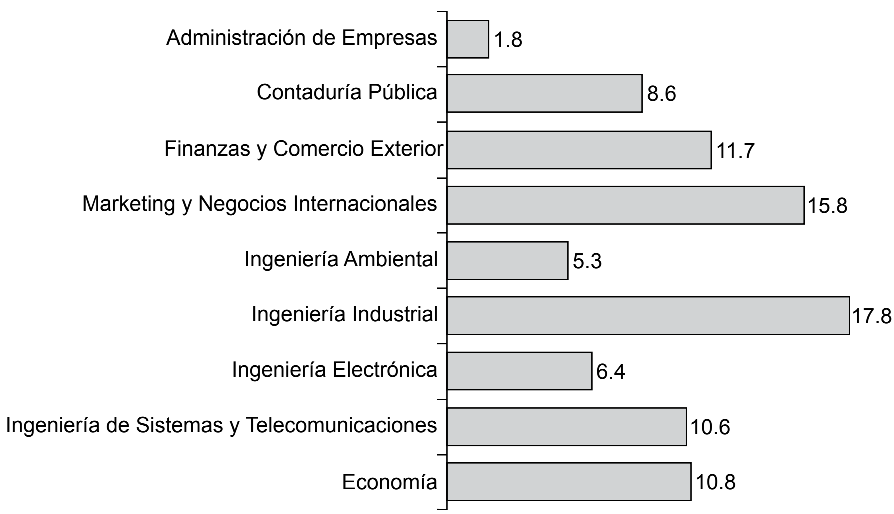


Figura 1. Distribución en porcentaje de los evaluados por programa profesional

(17.8%) y el menor número corresponde al programa de Administración de Empresas (1.8 por ciento).

2.3 Procedimiento de aplicación

Para la aplicación de las escalas de Cazorla y otros (1999) y Estrada (2002), se solicitó el permiso al departamento de matemáticas adscrito a la Escuela de Ciencias Exactas e Ingeniería que apoyó el estudio para encuestar a los estudiantes que cursan primer y segundo semestre académico de las escuelas de Economía, Ciencias Exactas e Ingeniería y la Escuela Internacional de Administración y Marketing, pues en los programas que ofrecen cada una de estas Escuelas, los estudiantes cuentan con dos cursos de estadística de nivel superior en tercer y cuarto semestre respectivamente. Para la ubicación de los estudiantes y la aplicación de la escala, se recurrió a los profesores que imparten cálculo diferencial e integral en cada uno de los programas del primer semestre académico de 2013; para conocer el número de encuestas por aplicar en cada salón, se consultó al coordinador de matemáticas, que cuenta con los soportes técnicos para esta información; una vez conocido el número de estudiantes en cada curso, se organizaron las encuestas en sobres de manila y se entregó y dialogó personalmente con cada profesor, a quien se le indicaban las instrucciones que seguir. La aplicación se realizó en horarios de estos cursos al inicio de la clase. Cabe señalar que la aplicación de la escala se hizo colectivamente, cada profesor aplicó la escala y dirigió la instrucción que previamente se había acordado, a saber, que la encuesta tiene reserva estadística, que su opinión no lo afectaría académicamente, que deseábamos conocer la opinión que tenía respecto a la estadística, el contacto que tuvo en sus cursos en el colegio o previos al llegar a la universidad, se repartió la encuesta de manera simultánea y se leyeron las instrucciones en voz alta, se reiteró responder a toda la encuesta y no analizar cada ítem, sino más bien dar su opinión de cada uno y finalmente se agradeció la participación en la investigación. Para la recolección de los datos, cada profesor entregó en sobre de manila las encuestas aplicadas a la secretaría del departamento de matemáticas.

2.4 Análisis estadístico

Los análisis estadísticos considerados se pueden agrupar en dos tipos:

- Análisis para la evaluación de la calidad de las escalas para medir las actitudes hacia la estadística
- Análisis de los resultados de las actitudes hacia la estadística en la población efectiva considerada

a) Análisis para la evaluación de la calidad de las escalas para medir las actitudes hacia la estadística

Para la evaluación de la calidad de las escalas para medir las actitudes hacia la estadística, se consideraron un conjunto de análisis que son parte usual del llamado análisis psicométrico de una escala (véase, por ejemplo, Nunnally, 1978). Este comprende:

- Análisis de las preguntas de las escalas en su versión original
- Análisis de las preguntas de las escalas en su versión corregida
- Análisis de las escalas en su conjunto

En general, el análisis de las preguntas de las escalas tiene el propósito de identificar las preguntas que menos contribuyen a la medida de actitud que se está analizando. Esto lo realizamos en dos etapas, primero considerando la versión original y posteriormente considerando la versión corregida en la etapa anterior, es decir, la versión de la escala sin algunas preguntas que fueron eliminadas como consecuencia del análisis.

En el análisis de preguntas se desea comprobar o conocer si los estudiantes responden de manera coherente ante la escala de actitud hacia la estadística, de tal modo que determinemos si las preguntas expresan el mismo rasgo de medida para la escala, es decir, verificar si las preguntas discriminan adecuadamente a los estudiantes entre aquellos que tienen buena actitud y aquellos que tienen una actitud negativa hacía la estadística.

Tanto el análisis de la versión original como el de la versión corregida (sin las preguntas que no resultaron adecuadas en el primer análisis) se realizaron utilizando el enfoque de la Teoría Clásica de los Test (para detalles, véase Pasquali, 2003, pp. 1-397). Los índices clásicos considerados fueron: media (Me), desviación estándar (De), correlación pregunta-total eliminando la pregunta (rit) y alfa de Cronbach de la escala sin considerar la pregunta (alpha). Mientras la *media* y la *desviación estándar* proporcionan una idea del comportamiento medio de cada pregunta, así como de su variabilidad, la *correlación pregunta-total eliminando la pregunta* (correlación de cada ítem con el total menos el ítem) permite comprobar en qué medida el puntuar alto ante un ítem supone un total alto en el resto de la escala de actitud. Este coeficiente de correlación toma un valor en el intervalo [–1, 1] y su valor debe ser estadísticamente significativo y positivo, es decir, preguntas con coeficiente de correlación significativo (se adopta un valor mayor que 0.20; sugerido por Everitt, 2002) indican que miden lo mismo que las demás preguntas. De manera dual, las preguntas con correlación no significativa (menor que un valor de 0.20) con respecto a las demás son candidatas a ser eliminadas de la escala de actitud, pues no están midiendo lo mismo que las demás preguntas.

Por otra parte, el objetivo primordial es conocer la confiabilidad de la escala de actitud (o exactitud del instrumento) como instrumento científico de medida, el cual se encuentra afectado por un error de medida realizada por el test, por tanto, es de suma importancia estimar el grado de error que afecta la medición *actitud hacia la estadística*. Es de señalar que existen varias maneras de conocer este error, a saber: test-retest, test paralelos y consistencia interna. Dichos estudios se conocen como el coeficiente de fiabilidad. En este estudio se procedió a utilizar el de consistencia interna mediante el alfa de Cronbach. El coeficiente de fiabilidad es un indicador global de la precisión con la que se está midiendo la actitud hacía la estadística. Se consideran adecuados los valores de alfa de Cronbach cuando superan el valor de 0.8 (Carmines y Zeller, 1979).

Así, el índice *alfa de Cronbach de la escala sin considerar la pregunta* es un índice que nos dice cuánto aporta una pregunta en la confiabilidad de la escala. Por ejemplo, si la confiabilidad baja cuando no se considera la pregunta, esto es un indicador de importancia de la pregunta en la confiabilidad. De manera contraria, si la confiabilidad de la escala sin la pregunta aumenta, significa que esta pregunta puede ser eliminada del conjunto de preguntas de la escala porque se obtendría una mejor confiabilidad.

Una vez que se ha determinado una versión corregida de la escala, es necesario realizar un análisis de las características de la escala en su conjunto. Este análisis comprende registrar la confiabilidad alfa de Cronbach final de la escala completa, así como estudiar si el puntaje de la escala en su versión final se distribuye como una curva normal. Este procedimiento es necesario para determinar el análisis más apropiado para los análisis estadísticos de los resultados de las actitudes encontradas, por ejemplo, para las comparaciones de medias por seguir.

b) Análisis de las actitudes hacia la estadística en la población efectiva considerada

Se realiza en primer lugar un análisis descriptivo por cada pregunta de la escala de actitudes y se identifican las actitudes específicas que mejor están valoradas y las que son valoradas en menor escala. Adicionalmente, en segundo lugar, se realiza una comparación de las actitudes en las escalas según algunos criterios, como el género de los estudiantes, mediante el uso de la comparación de dos medias usando la prueba T de Student y se comparan las actitudes según el programa de estudios y la escuela profesional al que pertenecen los estudiantes mediante el test Anova de comparaciones múltiples de medias.

Todos los índices, así como las estadísticas descriptivas y las pruebas de hipótesis, fueron desarrollados en el programa estadístico SPSS versión 20.0. Para mayores detalles, véase Landero y González (2006).

3. RESULTADOS

3.1 RESULTADOS DEL ANÁLISIS PARA LA EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DE LAS ESCALAS PARA MEDIR LAS ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA

Análisis de las preguntas de las escalas en su versión original

En los cuadros 4 y 5 presentamos los resultados del análisis de preguntas de la Escala de Actitudes hacia la Estadística considerando una escala global (45 ítems) y de las escalas AEE (25 ítems) y AEC (20 ítems) separadamente. Los índices considerados, descritos en la metodología, son: media (Me), desviación estándar (De), correlación ítem-total eliminando el ítem (rit) y alfa de Cronbach de la escala sin considerar el ítem (alpha).

Como está contemplado por varios autores, entre ellos Kline (1998), las preguntas que presentan una baja correlación con el resto de las preguntas en la escala se consideran inadecuadas para medir el constructo de interés. Así, un

Cuadro 4. Análisis de preguntas de las escalas AEE y AEC analizadas globalmente (45 preguntas)

Ítem	Me	De	rit	Alpha	Ítem	Me	De	rit	Alpha
1	3.32	0.99	**0.18**	0.92	26	3.49	0.95	0.54	0.92
2	3.79	1.02	0.28	0.92	27	3.60	0.99	0.55	0.92
3	2.56	1.14	**–0.17**	0.93	28	3.34	0.91	0.65	0.92
4	3.47	0.99	0.33	0.92	29	3.10	0.86	0.54	0.92
5	3.24	1.03	0.26	0.92	30	3.07	0.84	0.45	0.92
6	3.91	1.14	0.43	0.92	31	3.69	1.00	0.56	0.92
7	3.22	0.91	048	0.92	32	3.53	0.96	0.46	0.92
8	3.23	0.96	0.51	0.92	33	3.59	0.98	0.54	0.92
9	3.54	1.01	0.28	0.92	34	3.45	0.87	0.54	0.92
10	3.42	0.88	0.47	0.92	35	3.68	1.00	0.60	0.92
11	3.62	1.02	0.42	0.92	36	3.10	0.81	0.50	0.92
12	3.35	0.94	0.52	0.92	37	3.59	0.99	0.58	0.92
13	3.54	0.97	0.49	0.92	38	3.56	0.95	0.55	0.92
14	2.74	1.08	0.20	0.92	39	3.21	0.87	0.57	0.92
15	3.58	0.91	0.45	0.92	40	3.04	0.84	0.53	0.92
16	3.25	0.94	0.46	0.92	41	3.45	0.98	0.45	0.92
17	3.26	1.01	0.43	0.92	42	3.70	1.02	0.57	0.92
18	3.72	1.04	0.29	0.92	43	2.89	0.78	0.32	0.92
19	3.95	1.06	0.42	0.92	44	3.18	0.80	0.58	0.92
20	3.04	0.90	0.43	0.92	45	3.26	0.87	0.56	0.92
21	4.23	1.02	0.54	0.92					
22	2.79	0.88	0.24	0.92					
23	3.68	1.09	0.61	0.92					
24	3.76	0.93	0.42	0.92					
25	3.62	0.97	0.48	0.92					
Alfa de Cronbach: 0.92									

Me = media, De = desviación estándar, rit = correlación ítem-total eliminando el ítem, alpha = alfa de Cronbach de la escala sin considerar el ítem.

Cuadro 5. Análisis de preguntas de las escalas AEE y AEC por separado

AEE					AEC				
Ítem	Me	De	rit	Alpha	Ítem	Me	De	rit	Alpha
1	3.32	0.99	**0.19**	0.83	26	3.49	0.95	0.54	0.90
2	3.79	1.02	0.32	0.82	27	3.60	0.99	0.56	0.90
3	2.56	1.14	**–0.22**	0.85	28	3.34	0.91	0.61	0.90
4	3.47	0.99	0.35	0.82	29	3.10	0.86	0.57	0.90
5	3.24	1.03	0.27	0.82	30	3.07	0.84	0.46	0.90
6	3.91	1.134	0.43	0.82	31	3.69	1.00	0.56	0.90
7	3.22	0.91	0.46	0.82	32	3.53	0.96	0.50	0.90
8	3.23	0.96	0.46	0.82	33	3.59	0.98	0.57	0.90
9	3.54	1.01	0.29	0.82	34	3.45	0.87	0.53	0.90
10	3.42	0.88	0.49	0.82	35	3.68	1.00	0.61	0.90
11	3.62	1.02	0.41	0.82	36	3.10	0.81	0.51	0.90
12	3.35	0.94	0.51	0.81	37	3.59	0.99	0.60	0.90
13	3.54	0.97	0.52	0.81	38	3.56	0.95	0.54	0.90
14	2.74	1.08	0.16	0.83	39	3.21	0.87	0.58	0.90
15	3.58	0.91	0.42	0.82	40	3.04	0.84	0.50	0.90
16	3.25	0.94	0.47	0.82	41	3.45	0.98	0.51	0.90
17	3.26	1.01	0.39	0.82	42	3.70	1.02	0.60	0.90
18	3.72	1.04	0.32	0.82	43	2.89	0.78	0.33	0.91
19	3.95	1.06	0.45	0.82	44	3.18	0.80	0.59	0.90
20	3.04	0.90	0.38	0.82	45	3.26	0.87	0.58	0.90
21	4.23	1.02	0.54	0.81					
22	2.79	0.88	0.22	0.83					
23	3.68	1.09	0.57	0.81					
24	3.76	0.93	0.40	0.82					
25	3.62	3.62	0.46	0.82					
Alfa de Cronbach:0.91									

Me = media, De = desviación estándar, rit = correlación ítem-total eliminando el ítem, alpha = alfa de Cronbach de la escala sin considerar el ítem. AEE: Escala de Actitudes hacia la Estadística de Estrada (2002), AEC: Escala de Actitudes hacia la Estadística de Cazorla y otros (2009).

valor de correlación inferior a 0.20 se considera inaceptable. Adicionalmente, si la eliminación de un ítem tiene como consecuencia que el alfa de Cronbach de la escala se mantenga o incremente, esto puede significar que el ítem puede excluirse del grupo de preguntas.

Los resultados del cuadro 4 muestran que, al considerar las preguntas como componentes en una escala global, identificamos dos preguntas (preguntas 1 y 3 de la AEE) que presentan una correlación pregunta-total menor que 0.20, por lo que no satisfacen los criterios para ser consideradas en la escala y, en consecuencia, pueden ser eliminadas para la construcción de una escala global. En este caso nos quedaríamos con una versión de la escala de 43 preguntas.

De acuerdo con los resultados mostrados en el cuadro 5, nuevamente encontramos que las preguntas 1 y 3 dentro de la AEE son las preguntas con comportamiento inadecuado debido a su baja correlación con las demás preguntas y, por tanto, susceptibles de no ser consideradas en una versión recortada de la AEE. Para la AEC no encontramos ninguna pregunta ítem que se deba eliminar dentro de la escala.

Notamos también que la AEC presenta mejor alfa de Cronbach que la AEE, lo que indica que es una escala más confiable, aunque ambas escalas satisfacen el hecho de ser mayores que 0.8, que fue sugerido por Carmines y Zeller (1979) como criterio para que una escala sea considerada adecuada.

Los resultados encontrados indican que la AEC es una escala confiable con todas sus preguntas que son totalmente aceptadas para el caso de la población estudiada, pero que la escala AEE puede ser recortada eliminando dos preguntas y por consiguiente, una versión conjunta de ambas escalas también puede ser propuesta sin considerar esas dos preguntas.

Análisis de las preguntas de las escalas en su versión corregida

En vista de los resultados encontrados en esta sección, evaluamos la escala conjunta sin considerar las preguntas 1 y 3 y evaluamos una versión recortada de la escala AEE.

En los cuadros 6 y 7 presentamos los resultados del análisis de preguntas con las preguntas eliminadas en el punto 2.1. Los resultados muestran que, con la eliminación de las preguntas 1 y 3, hay un aumento en la confiabilidad de 0.92 para 0.93 en la escala global y de 0.83 a 0.85 en la Escala de Estrada (2002).

Cuadro 6. Análisis de preguntas de las escalas AEE y AEC analizadas globalmente versión final (43 preguntas)

Ítem	Me	De	rit	Alpha	Ítem	Me	De	rit	Alpha
2	3.79	1.02	0.30	0.93	26	3.49	0.95	0.54	0.93
4	3.47	0.99	0.34	0.93	27	3.60	0.99	0.55	0.93
5	3.24	1.03	0.27	0.93	28	3.34	0.91	0.65	0.93
6	3.91	1.14	0.43	0.93	29	3.10	0.86	0.54	0.93
7	3.22	0.91	0.48	0.93	30	3.07	0.84	0.45	0.93
8	3.23	0.96	0.50	0.93	31	3.69	1.00	0.56	0.93
9	3.54	1.01	0.27	0.93	32	3.53	0.96	0.46	0.93
10	3.42	0.88	0.48	0.93	33	3.59	0.98	0.54	0.93
11	3.62	1.02	0.41	0.93	34	3.45	0.87	0.55	0.93
12	3.35	0.94	0.52	0.93	35	3.68	1.00	0.59	0.93
13	3.54	0.97	0.49	0.93	36	3.10	0.81	0.49	0.93
14	2.74	1.08	0.20	0.93	37	3.59	0.99	0.58	0.93
15	3.58	0.91	0.45	0.93	38	3.56	0.95	0.55	0.93
16	3.25	0.94	0.47	0.93	39	3.21	0.87	0.57	0.93
17	3.26	1.01	0.43	0.93	40	3.04	0.84	0.53	0.93
18	3.72	1.04	0.29	0.93	41	3.45	098	0.45	0.93
19	3.95	1.06	0.42	0.93	42	3.70	1.02	0.57	0.93
20	3.04	0.90	0.43	0.93	43	2.89	0.78	0.32	0.93
21	4.23	1.02	0.54	0.93	44	3.18	0.80	0.58	0.93
22	2.79	0.88	0.23	0.93	45	3.26	0.87	0.56	0.93
23	3.68	1.09	0.61	0.93					
24	3.76	0.93	0.42	0.93					
25	3.62	0.97	0.48	0.93					
Alfa Escala Global: 0.93									

Me = media, De = desviación estándar, rit = correlación ítem-total eliminando el ítem alpha = alfa de Cronbach de la escala sin considerar el ítem.

Cuadro 7. Análisis de preguntas de las escalas AEE versión final (23 preguntas)

Ítem	AEE			
	Me	De	rit	Alpha
2	3.79	1.02	0.36	0.84
4	3.47	0.99	0.38	0.84
5	3.24	1.03	0.28	0.85
6	3.91	1.14	0.43	0.84
7	3.22	0.91	0.47	0.84
8	3.23	0.96	0.45	0.84
9	3.54	1.01	0.28	0.85
10	3.42	0.88	0.50	0.84
11	3.62	1.02	0.39	0.,84
12	3.35	0.94	0.52	0.,84
13	3.54	0.97	0.52	0.,84
14	2.74	1.08	0.16	0.,84
15	3.58	0.91	0.42	0.,84
16	3.25	0.94	0.48	0.,84
17	3.26	1.01	0.38	0.,84
18	3.72	1.04	0.32	0.85
19	3.95	1.06	0.45	0.,84
20	3.04	0.90	0.38	0.,84
21	4.23	1.02	0.55	0.,84
22	2.79	0.88	0.21	0.85
23	3.68	1.09	0.56	0.,84
24	3.76	0.93	0.41	0.,84
25	3.62	0.97	0.46	0.,84
Alfa de AEE: 0.85				

Me = media, De = desviación estándar, rit = correlación ítem-total eliminando el ítem alpha = alfa de Cronbach de la escala sin considerar el ítem.

El análisis de preguntas, considerando los criterios ya descritos, muestra que todas las preguntas son aceptables para formar parte de las escalas de actitudes.

Análisis de las escalas en su conjunto

Teniendo en cuenta los resultados ya mostrados, en el cuadro 8 presentamos algunas estadísticas para la evaluación de la normalidad en el puntaje de las escalas AEE, AEC y conjunta en sus versiones definitivas con 23, 20 y 43 preguntas, respectivamente. También se presentan las medias, desviación estándar y los puntajes mínimos y máximos obtenidos en la actitud hacia la estadística en cada escala considerada.

De acuerdo con el cuadro 8, encontramos que, en la prueba de normalidad ninguno de los niveles de significancia es menor que 0.05, entonces aceptamos la hipótesis de que los puntajes de las escalas son normales. Es decir, la distribución de puntajes de la actitud hacia la estadística se distribuye normalmente. La distribución de normalidad para el caso de la escala global se puede apreciar mejor en la figura 2. Asimismo, observamos que los índices de confiabilidad son mayores que 0.84, lo que confirma que las escalas son confiables para medir las actitudes.

Cuadro 8. Evaluación de la normalidad en el puntaje de actitudes en las escalas finales (N = 545)

Escala	Prueba de normalidad		Alfa de Cronbach	Media	De	Mín.	Máx.
	Estadística (KS)	Significancia (KS)					
Estrada (2002)-AEE	1.14	0.15	0.85	85.83	10.93	35	114
Cazorla y otros (1999)-AEC	1.64	0.09	0.91	67.54	10.99	24	97
Global	0.90	0.39	0.93	153.37	20.56	59	210

KS: Kolgomorov Smirnov Test.
Significancia *: < 0.05.

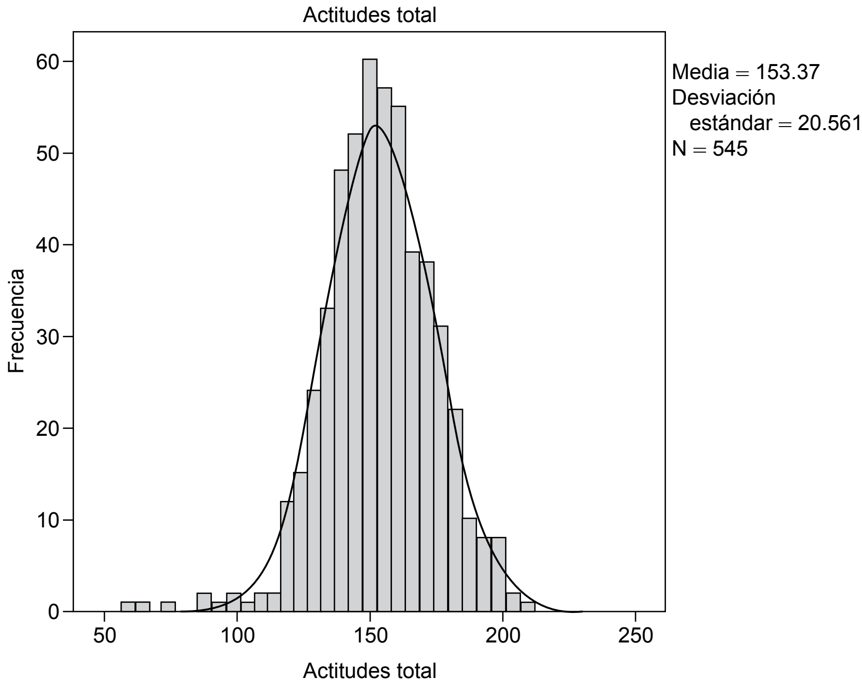


Figura 2. Distribución de puntajes en la Escala de Actitudes Global Final

3.2 Resultados del análisis de las actitudes hacia la estadística en la población efectiva considerada

Análisis descriptivo de las actitudes específicas

Desarrollamos un análisis descriptivo de las respuestas dadas por los evaluados a las diferentes preguntas de la escala global. En el cuadro 9 se presentan los resultados referentes a cada una de las 43 preguntas de la escala global corregida. Informamos el número de estudiantes en cada una de las categorías (1 = muy en desacuerdo, 2 = en desacuerdo, 3 = indiferente, 4 = de acuerdo, 5 = muy de acuerdo), así como la media y la desviación estándar para el total de la muestra. Cada pregunta en este caso representa una actitud específica.

Siguiendo el estudio hecho en Estrada y otros (2010), se ha optado, para fines de análisis, por presentar en el cuadro 9 todas las preguntas en un sentido

Cuadro 9. Frecuencias de respuesta, media y desviación estándar de cada ítem que conforman la Escala Global corregida (43 preguntas)

Ítems	Enunciado del ítem	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Media	De
2	La estadística ayuda a entender el mundo de hoy	21	58	53	294	119	3.79	1.02
4	La estadística es fundamental en la formación básica del futuro ciudadano	26	66	139	255	59	3.47	1.00
5	Uso la estadística para resolver problemas de la vida cotidiana	30	101	169	199	46	3.24	1.03
6	En la escuela se debería enseñar estadística (*)	27	38	103	168	209	3.91	1.14
7	Me divierto en las clases que se explica	30	56	254	174	31	3.22	0.91
8	Los problemas de la estadística me resultan fáciles	26	90	199	194	36	3.23	0.96
9	Entiendo las informaciones estadísticas que aparecen en los periódicos (*)	18	71	135	238	83	3.54	1.01
10	Me gusta la estadística porque me ayuda a comprender más profundamente la complejidad de ciertos temas	17	51	207	227	43	3.42	0.88
11	No me siento intimidado frente a los datos estadísticos (*)	15	56	170	185	119	3.62	1.02
12	Encuentro interesante el mundo de la estadística	26	56	210	208	45	3.35	0.94
13	Me gustan los trabajos serios donde aparecen estudios estadísticos	19	54	160	235	77	3.54	0.97
14	Utilizo mucho la estadística fuera de mi centro de estudio (*)	53	212	140	105	35	2.74	1,08

15	En la clase de estadística siempre entiendo de qué están hablando (*)	13	35	206	206	85	3.58	0.91
16	Me apasiona la estadística porque ayuda a ver los problemas objetivamente	26	69	240	165	45	3.25	0.94
17	La estadística es fácil	25	102	170	200	48	3.26	1.01
18	Me entero más del resultado de las elecciones cuando aparecen representaciones gráficas	23	45	116	237	124	3.72	1.04
19	La estadística no sólo sirve para la gente del área de ciencias (*)	17	38	101	188	201	3.95	1.06
20	Me gusta hacer problemas cuando uso la estadística	36	83	270	136	20	3.04	0.90
21	La estadística sí sirve (*)	17	21	72	145	290	4.23	1.02
22	A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido	52	113	283	89	8	**2.79**	0.88
23	Si pudiera eliminar alguna materia o curso, no sería la estadística (*)	23	45	163	167	147	3.68	1.09
24	La estadística ayuda a tomar decisiones más documentadas	16	39	103	291	96	3.76	0.93
25	No evito las informaciones estadísticas cuando leo (*)	13	50	174	204	104	3.62	0.97
26	Yo no quedo terriblemente tenso(a) en la clase de estadística (*)	15	47	223	176	84	3.49	0.95
27	Me gusta la estadística y no me asusta tener que hacer el curso de estadística (*)	8	62	189	168	118	3.60	1.00
28	Yo creo que la estadística es muy interesante y me gustan las clases de estadística	25	47	227	207	39	3.34	0.90
29	La estadística es fascinante y divertida	30	62	296	135	22	3.10	0.86
30	La estadística me hace sentir seguro(a) y es al mismo tiempo estimulante	24	81	293	126	21	3.07	0.84

Cuadro 9. Frecuencias de respuesta, media y desviación estándar de cada ítem que conforman la Escala Global corregida (43 preguntas) (conclusión)

Ítems	Enunciado del ítem	Totalmente en desacuerdo	En desacuerdo	Indiferente	De acuerdo	Totalmente de acuerdo	Media	De
31	Cuando estudio estadística, mi cabeza no "queda en blanco" y consigo pensar claramente (*)	16	44	156	206	123	3.69	1.00
32	Yo no tengo una sensación de inseguridad cuando me esfuerzo en estadística (*)	13	60	183	204	85	3.53	0.96
33	La estadística no me deja inquieto(a), descontento(a), irritado(a) e impaciente (*)	17	49	171	212	96	3.59	0.98
34	El sentimiento que yo tengo en relación con la estadística es bueno	17	49	185	258	36	3.45	0.87
35	La estadística no me hace sentir como si estuviese perdido(a) en una selva de números y sin encontrar la salida (*)	16	43	165	199	122	3.68	1.00
36	La estadística es algo que yo aprecio grandemente	21	71	302	133	18	3.10	0.81
37	Cuando yo escucho la palabra estadística, no tengo un sentimiento de aversión (rechazo) (*)	13	56	181	187	108	3.59	0.99
38	Yo no encaro la estadística con un sentimiento de indecisión, que es resultado del miedo de no ser capaz en estadística (*)	12	52	191	198	92	3.56	0.95
39	Me gusta realmente la estadística	26	56	269	168	26	3.21	0.87
40	La estadística es una de las materias que realmente me da gusto estudiar en la universidad	31	71	303	124	16	3.04	0.84

41	Pensar sobre la obligación de resolver un problema de estadística me deja nervioso(a) (*)	19	64	186	203	73	3.45	0.98
42	A mí siempre me gustó la estadística y es la materia que menos miedo me da (*)	15	40	178	171	141	3.70	1.02
43	Yo quedo más feliz en la clase de estadística que en la clase de cualquier otra materia	33	89	337	75	11	2.89	0.78
44	Yo me siento tranquilo(a) en estadística y me gusta mucho esa materia	20	56	291	161	17	3.18	0.80
45	Yo tengo una reacción definitivamente positiva en relación con la estadística: me gusta y aprecio esa materia	25	45	271	171	33	3.26	0.87

(*): Preguntas negativas.

positivo, incluido el caso de las preguntas que fueron presentadas en la escala en sentido negativo (preguntas 6, 9, 11, 14, 15, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 31, 32, 33, 35, 37, 38, 41 y 42). Así, podemos interpretar que una mayor media alcanzada corresponde a una actitud más positiva o de mayor concordancia con la afirmación de la pregunta y viceversa.

De acuerdo con el cuadro 9, podemos observar que entre las actitudes específicas mejor valoradas está la pregunta 21 (La estadística sí sirve) con media de concordancia de 4.23 (originalmente preguntada como "la estadística no sirve para nada" que obtuvo una discordancia de 0.77). Esto indica que los estudiantes colombianos reconocen la utilidad de la estadística. A continuación, está la pregunta 19 (La estadística no sólo sirve para la gente del área de ciencias) con media de concordancia de 3.95 (originalmente preguntada como "la estadística sólo sirve para la gente del área de ciencias", que obtuvo una discordancia de 1.05) lo que indica que los estudiantes tienen conciencia de que la estadística puede ser usada en diferentes áreas del conocimiento o profesiones. Notemos también que la pregunta 6 (En la escuela deberían enseñar estadística) presenta una media de concordancia de 3.91 (originalmente preguntada como "En la escuela no deberían enseñar estadística", que obtuvo una discordancia de 1.09). Esto nos indica el reconocimiento de la importancia de tener una mejor preparación en estadística desde la escuela y no sólo en la universidad.

Por otro lado, las actitudes específicas menos valoradas por los estudiantes colombianos fueron: pregunta 14 (Utilizo mucho la estadística fuera de mi centro de estudio) con media de concordancia de 2.74, seguido de la pregunta 22 (A menudo explico a mis compañeros problemas de estadística que no han entendido) con media de concordancia de 2.79, y de la pregunta 43 (Yo quedo más feliz en la clase de estadística que en la clase de cualquier otra materia) con media de concordancia de 2.89. En estos casos la media corresponde a una valoración intermedia, ligeramente positiva que puede ser interpretada como una actitud específica Indiferente, ni positiva ni negativa. Este grupo de preguntas se refieren al uso, habilidad y gusto por la clase de estadística. Puesto que los estudiantes fueron evaluados en las primeras semanas de clase, estas respuestas expresarían cierta desconfianza en términos de uso, habilidad y gusto hacia la disciplina de estadística que están comenzando a llevar durante el semestre. La desconfianza puede estar explicada por una inadecuada percepción acerca de los conocimientos que recibirán durante la disciplina, ya sea por falta de preparación previa o por las percepciones que se forman en disciplinas relacionadas, como es el caso de la matemática.

Según estos resultados, podemos decir que, pese a que la estadística en general es valorada positivamente por los estudiantes colombianos, por otro lado, es percibida con desconfianza como una disciplina difícil, no útil y no agradable. Creemos que este primer diagnóstico puede ser un indicador importante para iniciar programas de acompañamiento educativo encaminados a mejorar estos sentimientos de desconfianza para evitar que puedan transformarse en rechazo e inseguridad hacia la disciplina de estadística y consecuentemente determinen resultados de desempeño inadecuados hacia ella. Programas que refuercen actitudes más positivas y que planteen estrategias que mejoren y motiven los conocimientos en esta disciplina son necesarios, como por ejemplo los desarrollados por Pérez (2008) y por Pérez y Páez (2010) para el caso de la disciplina de matemática.

Actitudes hacia la estadística de acuerdo con el género de los evaluados

Se realiza un análisis comparativo de las actitudes hacia la estadística considerando el género de los estudiantes. Se hace uso de la prueba T de Student. Los resultados se muestran en el cuadro 10.

De acuerdo con el cuadro 10, los promedios de las actitudes no presentan diferencias significativas ni en la escala considerada globalmente ni en las escalas consideradas por separado (AEE y AEC) al considerar el género de los evaluados. Esto se ve contemplado en los niveles de significancia mayor que 5% de la última columna. Una mejor visión de la distribución de actitudes para cada

Cuadro 10. Comparación de promedios en las actitudes usando T de Student al considerar el género de los evaluados (N = 545)

Escala actitudes	Género	N	Media	De	T	Significancia
Estrada final-AEE	Masculino	350	85.38	11.06	–1.30	0.20
	Femenino	195	86.64	10.66		
Cazorla-AEC	Masculino	350	66.89	10.48	–1.83	0.07
	Femenino	195	68.69	11.82		
Global final	Masculino	350	152.27	20.06	–1.67	0.09
	Femenino	195	155.33	21.34		

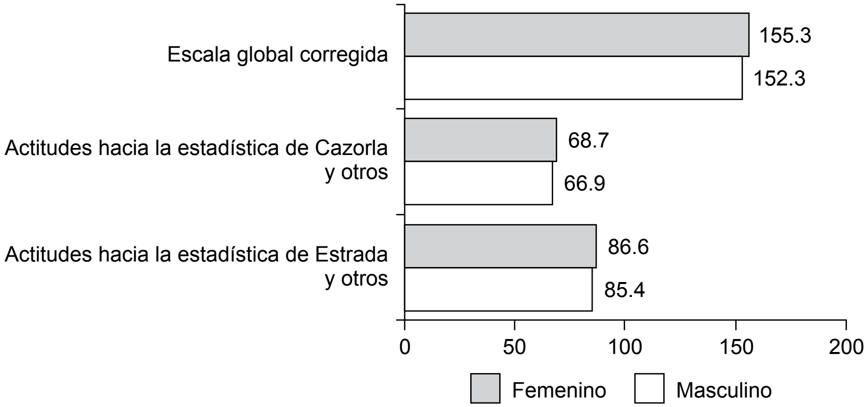


Figura 3. Distribución de las actitudes de acuerdo con el género de los evaluados

escala según el género de los estudiantes en la que se muestra la ausencia de diferencias en las actitudes puede apreciarse en la figura 3.

Actitudes hacia la estadística de acuerdo con la escuela profesional de los evaluados

Se realiza un análisis comparativo de las actitudes hacia la estadística considerando la escuela profesional a la que pertenecen los estudiantes. Se utiliza el test Anova de comparaciones múltiples de medias. Los resultados se muestran en el cuadro 11.

De acuerdo con el cuadro 11 podemos observar que hay diferencias significativas entre los promedios de la actitud según la escuela profesional a la que pertenecen los estudiantes evaluados, donde los más altos son los de las escuelas de Economía y de Ciencias Exactas e Ingeniería y los más bajos, los de la Escuela Internacional de Administración y Marketing (EIAM). Es decir, los evaluados que integran las escuelas de Economía y de Ciencias Exactas e Ingeniería presentan mejores actitudes frente a la estadística que los que integran la Escuela Internacional de Administración y Marketing. Estas diferencias en las actitudes son estadísticamente significativas. Una mejor visión de la distribución de actitudes según la escuela puede apreciarse en la figura 4.

Cuadro 11. Comparación de promedios en las actitudes utilizando Anova al considerar la escuela profesional a la que pertenecen los evaluados (N = 545)

Escala actitudes	Escuela profesional	N	Media	De	F	Significancia
Estrada corregida AEE	EIAM	267	84.48	11.13	4.32	0.014*
	Ciencias Exactas e Ingeniería	219	86.88	10.64		
	Economía	59	88.03	10.39		
Cazorla-AEC	EIAM	267	65.91	11.09	5.86	0.003**
	Ciencias Exactas e Ingeniería	219	69.02	10.96		
	Economía	59	69.41	9.70		
Global corregida	EIAM	267	150.39	21.03	5.72	0.003**
	Ciencias Exactas e Ingeniería	219	155.90	20.31		
	Economía	59	157.44	17.46		

*: $p < 0.05$ ** $p < 0.01$.
EIAM: Escuela Internacional de Administración y Marketing.

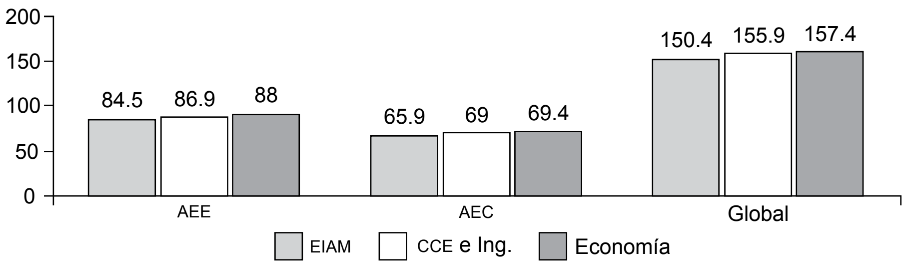


Figura 4. Distribución de las actitudes según la escuela de los evaluados

Actitudes hacia la estadística de acuerdo con el programa profesional de los evaluados

Se realiza un análisis comparativo de las actitudes hacia la estadística considerando el programa profesional al que pertenecen los estudiantes. Se utiliza el test Anova de comparaciones múltiples de medias. Los resultados se muestran en el cuadro 12.

Cuadro 12. Comparación de promedios en las actitudes según las tres escalas usando Anova, al considerar el programa profesional de los evaluados (N = 545)

Escala actitudes	Programa profesional	N	Media	DS	F	Significancia
Estrada corregida AEE	Administración de Empresas	70	84.87	10.54		
	Contaduría Pública	47	84.40	12.79	2.10	0.035*
	Finanzas y Comercio Exterior	64	85.81	10.14		
	Marketing y Negocios Internacionales	86	83.20	11.40		
	Ingeniería Ambiental	29	89.48	10.82		
	Ingeniería Industrial	97	87.80	10.43		
	Ingeniería Electrónica	35	83.69	8.42		
	Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones	58	85.97	11.76		
	Economía	59	88.03	10.39		
	Administración de Empresas	70	65.40	10.74		
Cazorla-AEC	Contaduría Pública	47	67 .15	11.55	4.67	0.000**
	Finanzas y Comercio Exterior	64	68.00	10.33		
	Marketing y Negocios Internacionales	86	64.09	11.52		
	Ingeniería Ambiental	29	73.28	9.65		
	Ingeniería Industrial	97	70.59	10.72		
	Ingeniería Electrónica	35	62.63	9.00		
	Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones	58	68.12	11.52		
	Economía	59	69.41	9.70		
	Administración de Empresas	70	150.27	20.09		
Global corregida	Contaduría Pública	47	151.55	23.07	3.62	0.000**
	Finanzas y Comercio Exterior	64	153.81	19.12		
	Marketing y Negocios Internacionales	86	147.29	21.87		
	Ingeniería Ambiental	29	162.76	18.84		
	Ingeniería Industrial	97	158.39	20.16		
	Ingeniería Electrónica	35	146.31	16.06		
	Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones	58	154.09	21.69		
	Economía	59	157.44	17.46		

*: $p < 0.05$ **: $p < 0.01$.

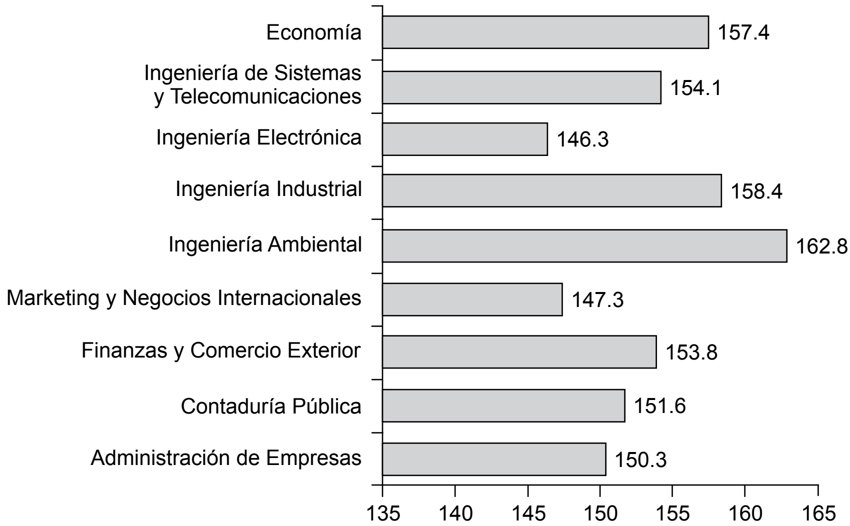


Figura 5. Distribución de las actitudes hacia la estadística de acuerdo con el programa profesional en la escala Global

De acuerdo con el cuadro 12, encontramos diferencias significativas en las medias de la actitud hacia la estadística según el programa seguido por los evaluados, las cuales son más altas y positivas para el programa de Ingeniería Ambiental y más bajas para el programa de Marketing y Negocios Internacionales. Una mejor apreciación de esta distribución se aprecia en la figura 5 para el caso de la escala global.

4. COMENTARIOS FINALES

Esta investigación se enfocó en realizar una evaluación sobre las actitudes hacia la estadística de ingresantes universitarios en Colombia al iniciar el primer semestre académico, donde aún no han cursado esta asignatura.

Nuestro estudio utilizó una escala global para medir las actitudes compuesta por dos escalas de actitudes hacia la estadística usadas en la literatura, pero no en el caso de Colombia: la escala de Estrada (2002, AEE) y la escala de Cazorla y otros (1999, AEC). Para ello, se evaluó en primer lugar la calidad de estas escalas para medir las actitudes hacia la estadística en los estudiantes universitarios colombianos. Se incluyó un análisis de preguntas, así como un análisis de la confiabilidad. En general, los resultados sobre las escalas de actitudes a la estadística en nuestra muestra presentan propiedades psicométricas adecuadas, tanto cuando se analiza la Escala de actitudes global como las escalas AEE (Estrada 2012) y AEC (Cazorla y otros 1999), las cuales cuentan respectivamente con una versión final de 43, 23 y 20 preguntas, resultante del análisis de preguntas donde se eliminaron dos ítems (ítem 1 e ítem 3) con una baja correlación. Las escalas presentan alta confiabilidad final de 0.95, 0.88 y 0.94, respectivamente. Estos resultados son semejantes a los hallados en Tarazona y otros (2013), Aliaga (2009), Estrada y otros (2013) y en los hallados en Aparicio y Bazán (2006), lo que confirma la utilidad de estas escalas para medir las actitudes hacia la estadística en el caso de los estudiantes universitarios de Colombia.

Las escalas de actitudes presentadas en este estudio pueden permitir un diagnóstico inicial para el establecimiento de estrategias encaminadas a mejorar actitudes negativas detectadas y mejorar la predisposición de los alumnos cuando cursan una disciplina de estadística. Las escalas confiables permiten evaluar las actitudes con las que los alumnos inician la disciplina y, a partir de dichos resultados, es posible detectar qué actitudes específicas se perciben como inadecuadas hacia una disciplina de estadística y que, consecuentemente, pueden dificultar el aprendizaje. A partir de esta primera evaluación, es posible proponer estrategias encaminadas a mejorar tales actitudes y por ende aumentar la posibilidad de mejorar el aprendizaje y los resultados de las evaluaciones tal y como diversos estudios (Aparicio, Bazán e Abdounur, 2004) han probado para el caso del aprendizaje de la matemática.

En relación con los resultados de las actitudes de los estudiantes colombianos identificados en este estudio, estos nos permiten concluir que los estudiantes inician el curso con una serie de actitudes positivas específicas sobre la estadística, pero otras actitudes específicas que requieren ser investigadas más a fondo. Así, los evaluados perciben la importancia de la estadística tanto en la formación académica como en la vida cotidiana, pero presentan desconfianza en relación con su habilidad, gusto y utilidad de la disciplina de estadística, lo cual se puede traducir en temores y rechazos futuros que pueden dificultar un adecuado rendimiento.

Considerando los puntajes de las medidas de las actitudes en las tres escalas, no se identificaron diferencias significativas en las actitudes al considerar el género de los estudiantes. Estos resultados también son informados en Tarazona y otros (2013). Por otro lado, se identificaron diferencias significativas ($p > 0.05$) en la actitud hacia la estadística entre los estudiantes según la escuela profesional. De acuerdo con estas diferencias significativas, se constató que los estudiantes de las escuelas de Economía, Ciencias Exactas e Ingeniería presentan la mejor actitud hacia la estadística en las diferentes escalas, lo que se traduce en una actitud más alta o más positiva, mientras que en los estudiantes de la Escuela Internacional de Administración y Marketing (EIAM) identificamos las actitudes hacia la estadística más bajas o más negativas. Estos resultados son coherentes con la especialización y uso futuro de la estadística en estas escuelas profesionales. Así, estudiantes de Economía, Ciencias exactas e Ingeniería llevan no solamente una asignatura de estadística, sino que, además, tienen en su currículo varias asignaturas asociadas al enfoque de análisis de datos cuantitativos. El caso es diferente para los estudiantes de Administración y Marketing, que tienen menos asignaturas asociadas a este enfoque.

Asimismo, se identificaron también diferencias significativas ($p > 0.05$) en la actitud de los estudiantes de acuerdo con el programa profesional en el que estudian. En general, identificamos que la actitud hacia la estadística es más positiva en los estudiantes del programa de Ingeniería Ambiental, Ingeniería Industrial y Economía, ya que, por la naturaleza de estas carreras, usarán la estadística de manera más constante. Por otro lado, los programas de Ingeniería de Sistemas y Telecomunicaciones, Finanzas, Administración de Empresas y Contaduría mostraron una actitud hacia la estadística con tendencia medianamente positiva. Las actitudes más bajas se identificaron en los programas de Ingeniería Electrónica y de Marketing y Negocios Internacionales que, en contraste, tendrán un menor uso de la estadística.

El estudio de las actitudes hacia la estadística es un insumo de un alto valor en el interior de la universidad evaluada, en particular por la deserción académica que se presenta en los cursos de estadística. En varios estudios sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística, se destaca el papel que desempeña el profesor, pero por desgracia, no se ha considerado uno de los factores que tienen que ver con la deserción académica; se considera que depende primordialmente del estudiante y que puede estar relacionada con aspectos afectivos como resultado de experiencias anteriores, creencias o inadecuados aprendizajes que se traducen en predisposiciones negativas hacia la disciplina. Así, creemos que los resultados obtenidos deben ser valorados por los docentes de esta especialidad para diseñar un contenido didáctico que responda a las expectativas favorables frente al curso de estadística y crear nuevas formas de abordar los temores hacia la disciplina. Estos resultados resultan inéditos para el caso colombiano y pueden analizarse en el futuro con investigaciones más detalladas.

Es de anotar que este estudio no constituye un aporte aislado para la universidad evaluada, ya que desde el año 2009 el Departamento de Matemáticas de esta institución viene aplicando a los estudiantes que ingresan al primer semestre de las escuelas en mención en este estudio dos instrumentos, uno de actitud hacia las matemáticas, adaptado de la escala de actitudes propuesta en Aparicio y Bazán (1997) y un test de rendimiento óptimo. A partir de los resultados obtenidos por los estudiantes en estos instrumentos se elaboran talleres y programas encaminados a cambiar las actitudes negativas y a reforzar los conocimientos más débiles. Esta metodología (véase Pérez y Páez, 2010) se ha venido desarrollando sistemáticamente cada semestre y ha permitido intervenir de manera positiva en el rendimiento y desempeño académico de los estudiantes; de tal manera, esperamos replicar la experiencia en los cursos de estadística, a partir de los resultados obtenidos en el presente estudio.

Por último, creemos que la presente investigación nos acerca a conocer las actitudes hacia la estadística en futuros profesionales del área de ciencias, lo que en el futuro puede guiarnos en el planteamiento de acciones didácticas por considerar en la enseñanza de esta disciplina. Por otro lado, también nos permite tener una escala global de actitudes hacia la estadística con propiedades psicométricas óptimas que puede ser utilizadas para otras poblaciones de universitarios y en estudios que consideren más variables de estudio que permitan mayores comparaciones con los resultados registrados en esta investigación.

AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece al Departamento de Matemáticas de la Universidad Sergio Arboleda por el apoyo recibido.

La segunda autora agradece el apoyo de la CAPES (Coordinación de Perfeccionamiento de Investigadores de Nivel Superior-Brasil).

Los autores agradecen a los árbitros por los importantes comentarios y observaciones que permitieron la mejora de nuestro trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Agne, K. J., G. E. Greenwood y L. D. Miller (1994), "Relationships between teacher belief systems and teacher effectiveness", *The Journal of Research and Development in Education*, vol. 27, núm. 3, pp. 141-152.

Aiken, L. R. (1974), "Two scales of attitude toward mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 5, pp. 67-71.

Aliaga, R. (2009), *Actitud hacia la estadística en estudiantes universitarios de ciencias y de educación*, Tesis para obtener el grado de Magíster en enseñanza de la matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú, Departamento de Ciencias, Sección Matemática.

Aparicio, A. y J. L. Bazán (1997), "Actitudes hacia las matemáticas en ingresantes a la Universidad Nacional Agraria la Molina", *Más Luz, Revista de Psicología y Pedagogía*, vol. 3, núm. 2, pp. 351-380. Disponible en: http://www.ime.usp.br/~jbazan/download/ArticuloMasLuz.pdf

——— (2006), "Actitud y rendimiento en estadística en profesores peruanos", Congreso Latinoamericano de Educación Matemática Educativa, CLAME, 2005, Montevideo, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 19, pp. 644-650. Disponible en: http://www.ime.usp.br/~jbazan/download/ALME19.pdf

——— (2008), "Aspectos afectivos intervinientes en el aprendizaje de la estadística: actitudes y sus formas de evaluación", ponencia presentada en el Congreso Latinoamericano de Educación Matemática Educativa, CLAME, 2007, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol. 21, pp. 180-189. Disponible en: http://www.clame.org.mx/documentos/alme21.pdf

Aparicio, A., J. L. Bazán y O. J. Abdounur (2004), "Atitude e desempenho em relação à estatística em professores de ensino fundamental no Peru: primeiros resultados", *VII EPEM, Encontro Paulista de Educação Matemática*, Sao Paulo, Brasil. Disponible en: http://corinto.pucp.edu.pe/mmepe/files/co0009.doc.

Aparicio, A., J. L. Bazán y O. J. Abdounur (2004), "Atitude e desempenho em relação à estatística em professores de ensino fundamental no Peru: primeiros resultados", *VII EPEM: Encontro Paulista de Educação Matemática*, Sao Paulo, Brasil. Disponible en: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/.

Auzmendi, E. (1992), *Las actitudes hacia la matemática estadística en las enseñanzas medias y universitarias*, Bilbao, Mensajero.

Bazán, J. (2006), "La estadística llega a la escuela en el Perú", en M. González, J. L. Bazán y R. Sánchez (eds.), *Coloquios sobre Matemática Educativa 2005*, parte 2, pp. 87-109. Informe de Investigación 19, Serie C. Sección Matemática, Pontificia Universidad Católica del Perú. Disponible en: http://www.ime.usp.br/~jbazan/download/ArticuloCME.pdf

Blanco, A. (2008), "Una revisión crítica de la investigación sobre las actitudes de los estudiantes universitarios hacia la estadística", *Revista Complutense de Educación*, vol. 19, núm 2, pp. 311-330. Disponible en: http://revistas.ucm.es/index.php/RCED/article/viewFile/RCED0808220311A/15466

Bonafé, F., L. Loffredo y Campos (2010), "Atitudes em relação à Bioestatística de discentes e docentes da Faculdade de Ciências Farmacêuticas de Araraquara-UNESP", *Revista de Ciências Farmacêuticas Básica e Aplicada*, vol. 31, núm. 2, pp. 143-147.

Brito, M. (1988), "Validação de uma escala de atitudes em relação à Matemática", *Zetetiké*, vol. 6, núm. 9, pp. 109-162.

Brito, M. y C. Vendramini, (2001), "Avaliação de uma escala de atitudes em relação à estatística e sua relação com o conceito e a utilidade da Estatística", *28º Congresso Interamericano de Psicologia*, Santiago, Chile, vol. 1, pp. 11-32.

Cazorla, I. M., C. Silva, C. Vendramini y M. Brito (1999), "Adaptação e validação de uma escala de atitudes em relação à estatística", *Anais da conferência internacional: experiências e perspectivas do ensino da estatística*, Florianópolis, Santa Catarina, pp. 45-57.

Carmines, Edward G. y Richard A. Zeller (1979), *Reliability and Validity Assessment*, Newbury Park, CA, Sage Publications.

Carmona, J. (2004), "Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística", *Statistics Education Research Journal*, vol. 3, núm. 1, pp. 5-28. Disponible en: https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ3(1)_marquez.pdf

Darias, Juan (2000), "Escala de actitudes hacia la estadística", *Psicothema*, vol. 12, núm. 2, pp. 175-178. Consultado el 16 de julio de 2014 en: http://www.psicothema.com/pdf/542.pdf

Escalante, E. (2010), "Actitudes de alumnos de posgrado hacia la estadística aplicada a la investigación", *Encuentro 2010*, año XLII, vol. 42, núm. 85, pp. 27-38. Disponible en: http://www.uca.edu.ni/encuentro/images/stories/2012/pdf/85e/85e2a.pdf

Estrada, A. (2002), *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado*, Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.

Estrada, A. y C. Batanero (2008), "Explaining teachers' attitudes towards statistics", en C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*, Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008, Round Table Conference. Monterrey: International Commission on Mathematical Instruction e International Association for Statistical Education. Disponible en: http://web.udl.es/usuaris/z4084849/docs/icmi2008.pdf

Estrada, A., C. Batanero y J. Fortuny (2003), "Actitudes y estadística en profesores en formación y en ejercicio", en Edicions de la Universitat de Lleida, *Actas del 27 Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, Lleida, España.

——— (2004), "Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio", *Enseñanza de las ciencias*, vol. 22, núm. 2, pp. 263-274.

Estrada, A., J. L. Bazán y A. Aparicio, (2010), "Un estudio comparativo de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos", *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, núm. 24, pp. 45-56.

——— (2013), "Evaluación de las propiedades psicométricas de una escala de actitudes hacia la estadística en profesores", *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, núm. 3, pp. 5-23. Disponible en: http://www.aiem.es/index.php/aiem/article/view/61

Evangelista, C. y B. Arno (2012), *Atitudes em Relação à Estatística e sua Influência na Escolha Profissional dos Alunos Concluintes do Ensino Médio*. Disponible en: http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/595/422

Everitt, Brian S. (2002), *The Cambridge Dictionary of Statistics*, Cambridge University Press.

Gómez, I. (2000), *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*, Madrid, Narcea.

——— (2009), "Actitudes matemáticas: propuestas para la transición del bachillerato a la universidad", *Educación Matemática*, vol. 21, núm. 3, pp. 5-32. Disponible en:. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516671002

Kline, P. (1998), *The new psychometrics: science, psychology and measurement*, Londres, Routhledge.

Landero, R. y M. González (2006), *Estadística con SPSS y metodología de la investigación*, México, Trillas.

Modéjar, J., M. Vargas y A. Bayot (2008), "Medición de la actitud hacia la estadística. Influencia de los procesos de estudio", *Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa*, vol. (6)3, núm. 6, pp. 729-748. Disponible en:

http://www.investigacion-psicopedagogica.org/revista/new/ContadorArticulo.php?261

Nunnally, J. C. (1978), *Psychometric Theory*, McGraw-Hill, pp. 86-113, 190-255.

Oliveira, E. (2011), "Validação de atitudes, características pessoais, utilização de tecnologias e prática docente de professores de graduação em estatística", *Educação Matemática. Pesquisa,* Sao Paulo, vol. 13, núm. 2, pp. 253-272.

Pasquali, L. (2003), *Psicometria: teoria dos testes na psicologia e na educação*, Petrópolis, Editora Vozes.

Pérez, L. E. (2008), *Actitudes y rendimiento en matemáticas de los estudiantes que ingresan al primer semestre de la Universidad Sergio Arboleda,* Tesis de Magíster en Docencia e Investigación Universitaria, Escuela de Postgrado, Universidad Sergio Arboleda, Bogotá.

Pérez, L. E., D. Niño y D. Páez (2010), "Actitudes, aptitudes y rendimiento académico en matemáticas", *Memorias del 11º. Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1140/1/649_Actitudes_aptitudes_Asocolme2010.pdf

Phillips, R. (1993), "Teacher attitude as related to student attitude and achievement in Elementary School Mathematics", *School Science and Mathematics*, vol. 73, núm. 6, pp. 501-507.

Roberts, D. M. y E. W. Bilderback (1980), "Reliability and validity of a statistics attitude survey", *Educational and Psychological Measurement,* vol. 40, pp. 235-238.

Rodríguez, Nelida (2011), "Actitudes de los estudiantes universitarios hacia la estadística", *Interdisciplinaria*, vol. 28, núm. 2, pp. 199-205. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=18022339002

Schau, C. y otros (1995), "The development and validation of the survey of attitudes towards statistics", *Educational and Psychological Measurement,* vol. 55, núm. 5, pp. 868-875. Disponible en: http://www2.mat.ulaval.ca/fileadmin/Cours/STT-7620/Stats04.pdf

Tarazona, E., J. L. Bazán y A. Aparicio (2013), "Actitudes hacia la estadística en universitarios peruanos de mediana edad", RIDU. *Revista Digital de Investigación en Docencia Universitaria*, año 7, núm. 1, pp. 57-76. Disponible en: http://revistas.upc.edu.pe/index.php/docencia/article/view/187/143

Tejero, Carlos y María Castro (2011), "Validación de la escala de actitudes hacia la estadística en estudiantes españoles de ciencias de la actividad física y del deporte", *Revista Colombiana de Estadística*, vol. 34, núm. 1, pp. 1-14. Disponible en: http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/EMIS/journals/RCE/V34/v34n1a01.pdf

Vendramini, C. y M. Brito (2001), "Relações entre atitude, conceito e utilidade da Estatística", *Psicologia Escolar e Educacional*, João Pessoa, vol. 5, núm. 1, pp. 59-63, junio de 2001.
Wise, S. L. (1985), "The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics", *Educational and Psychological Measurement*, vol. 45, núm. 2, pp. 401-405.
Zapata, L. y P. Rocha (2011), "Actitudes de profesores hacia la estadística y su enseñanza", *Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, CIAEM, Recife, Brasil.

DATOS DE LOS AUTORES

Luis Eduardo Pérez Laverde
Departamento de Matemática, Universidad Sergio Arboleda, Colombia
eduardo.perez@usa.edu.co

Ana Sofía Aparicio Pereda
Facultad de Educación, Universidad de Sao Paulo, Brasil
anasofiap@usp.br

Jorge Luis Bazán Guzmán
Instituto de Ciencias Matemáticas y de Computación, Universidad de Sao Paulo, Brasil
jlbazan@icmc.usp.br

Oscar Jõao Abdounur
Instituto de Matemática y Estadística, Universidad de Sao Paulo, Brasil
abdounur@ime.usp.br

ARTÍCULO DE INVESTIGACIÓN

Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula

José Francisco Leguizamón Romero, Olga Yanneth Patiño Porras y Publio Suárez Sotomonte

Resumen: El artículo hace referencia a un estudio, en el que se identificaron las tendencias didácticas de algunos profesores y sus concepciones acerca del papel de los medios educativos[1] en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La clasificación de las tendencias se asumió a partir de la planteada por Porlán (1995). La investigación se desarrolló bajo un paradigma cualitativo, con diseño de estudio de caso, en el que participaron docentes de instituciones educativas tanto públicas como privadas. Para la recolección de datos, se tuvo en cuenta un cuestionario y la observación de clases. Se concluyó que los docentes poseen una tendencia tecnológica con rasgos tradicionales; ellos conciben los medios educativos como ayudas de estudio (Godino, 2003), son elementos que permiten la motivación, el apoyo a la memorización de conceptos y el soporte para la exposición de la temática por parte del docente.

Palabras clave: concepciones, tendencias didácticas, medios educativos, mediación, educación matemática.

Trends teaching math teachers and their conceptions of the role of educational media in the classroom

Abstract: This article informs of a study where we identified the didactic tendencies of some teachers and their conceptions about the role of educational resources in the processes of teaching and learning of mathematics. The trends

Fecha de recepción: 31 de octubre de 2014; fecha de aceptación: 11 de septiembre de 2015.

[1] En este trabajo se entiende como medios educativos todos aquellos objetos físicos, juegos y pasatiempos diseñados con un fin didáctico, que ofrecen a los estudiantes experiencias de conocimiento que permiten observar, manipular y desarrollar habilidades prácticas e intelectuales en los procesos comunicativos de la clase de matemáticas, con la finalidad de facilitar la relación entre profesor-estudiante-conocimiento.

classification was assumed from the Porlan's proposal (1995). The research was developed under a qualitative paradigm, through a case study. The participants were teachers from both public and private schools. Data were gathered through a questionnaire as well as class observations. Conclusions showed that teachers have technological tendencies with traditional features; they conceived the educational resources as aids of study (Godino, 2003), elements that allow motivation, support the memorization of concepts, and support the exposition of the thematic by the teacher.

Keywords: conceptions, didactic trends, educational resources, mediation, mathematics education.

INTRODUCCIÓN

En la mayoría de las instituciones educativas de enseñanza básica y media, las matemáticas se trabajan de forma magistral, donde el docente explica la materia, realiza ejemplos y los estudiantes resuelven una serie de ejercicios aplicando los pasos dados hasta lograr el resultado (Monge y Vallejos, 2012). Esta situación se deriva posiblemente de las creencias que tiene el profesor acerca de la naturaleza de las matemáticas, pues es uno de los factores que condiciona su pensar y actuar en el aula, con el que construye el marco dentro del cual utiliza los recursos, las estrategias cognitivas y metacognitivas al trabajar las diferentes temáticas matemáticas. Al respecto, Jiménez (2010) menciona que, en general, lo que no tienen muy claro la mayor parte de los docentes es de qué manera sus concepciones sobre la matemática, su enseñanza o aprendizaje pueden incidir en el logro de aprendizajes significativos de sus estudiantes.

La importancia de las concepciones del profesor acerca de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, el conocimiento, el contenido, métodos y materiales disponibles para enseñar, influye en el trabajo en el aula. Tal como lo plantea Schön (1983), hay una continua unión entre la teoría y la práctica, entre el pensamiento y la acción, es importante tener presente que:

> Las concepciones del profesor son uno de los operadores que actúan en el proceso de transformación del conocimiento a la situación didáctica y en el propio control del estudiante de la interacción alumno-situación. Por ello, resulta natural pensar las concepciones como eje de la evolución profesional del profesor (Carrillo, 1996).

Igualmente, en diversas investigaciones se ha encontrado que los estudiantes muestran un bajo interés por el estudio de la matemática, en la que existe un imaginario que la ha caracterizado por ser una de las áreas con mayor dificultad de aprendizaje en los estudiantes de secundaria, ya que ellos muestran apatía y se predisponen con el solo hecho de escuchar la palabra "matemáticas" (Luna, 2007).

En la investigación realizada por Alsina (2006), se concluye que una de las mayores causas de la apatía de los estudiantes hacia el estudio de la matemática es el escaso uso de materiales didácticos que permitan desarrollar una acción mental que estimule la motivación e interés del estudiante en el proceso de aprendizaje. En general, el profesor justifica el escoger los medios educativos, por su carácter motivacional para tornar las clases alegres y sin tensiones. Lo anterior hace que el profesor no reflexione sobre por qué es importante el material educativo, así como tampoco sobre la mejor forma y momento para usarlo (Fiorentini y Miorim, 1990).

El profesor Artur Parcerisa (2007) señala que los medios educativos cumplen una función mediadora entre la intencionalidad educativa y el proceso de aprendizaje, entre el docente y los estudiantes, ya que una manera de promover diferentes experiencias de aprendizaje es mediante la utilización de los medios educativos, los cuales permiten la exploración, experimentación y manipulación, lo que lleva a que el estudiante comprenda los conceptos que se trabajan en el área.

> Es decir, los recursos didácticos en las clases de matemáticas involucran una diversidad de elementos que son utilizados principalmente como soporte experimental en la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, se considera que estos materiales deben servir como mediadores para facilitar la relación profesor-alumno-conocimiento en la construcción de un saber (Passos, 2006, p. 78).

En consecuencia con lo plasmado anteriormente, el objetivo de esta investigación fue identificar las tendencias didácticas de algunos profesores de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Esta propuesta se desarrolló bajo un paradigma cualitativo que permitió describir las acciones de los docentes en el desarrollo de sus actividades, considerando lo que piensan, actitudes y comportamientos (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). El diseño con el que se trabajó fue el estudio de caso, en el que participaron docentes que orientan la asignatura de matemáticas en los grados de octavo a once, de dos instituciones educativas de la ciudad de Tunja (Boyacá, Colombia), una de carácter oficial y otra privada. Como resultado de este proceso, se describen las concepciones de los profesores acerca del papel de los medios educativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las cuales fueron obtenidas del análisis de instrumentos como: cuestionario relacionado con las concepciones enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; observación no participante, y revisión del planeador[2] de clase.

Se pudo determinar que los docentes relacionados con la investigación poseen una tendencia tecnológica con rasgos tradicionales, donde la concepción de los medios educativos es despertar en los estudiantes una actitud positiva hacia el trabajo de la asignatura, servir de apoyo para el trabajo expositivo del docente y como recurso de ayuda para la memorización del estudiante. La importancia de evidenciar este tipo de resultados es que permite realizar procesos de reflexión de los docentes sobre sus propias acciones, buscando la mejora de los procesos educativos.

ASPECTOS TEÓRICOS

En el desarrollo de este proyecto se consideraron tres grandes temáticas que sirvieron como base teórica de la investigación: las concepciones, las tendencias didácticas y los medios educativos.

CONCEPCIONES

El término concepciones tiene muchas acepciones. Puede asumirse como un conjunto de "creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes" (Thompson, 1992, p. 132). Las concepciones de un profesor sobre la matemática (o su enseñanza) son el conjunto de creencias y posicionamientos sobre la matemática que el investigador supone que posee el profesor tras el análisis de sus opiniones y de las respuestas a

[2] El planeador de clase es el instrumento en el cual el docente registra los pasos y actividades por desarrollar en una clase determinada.

preguntas sobre su práctica respecto a temas relativos a la naturaleza de la matemática (o la enseñanza de la matemática) (Carrillo, 1996).

Cuando se habla de concepciones de los profesores, se puede hacer referencia a la matemática como disciplina y, en tal caso, pueden estar vinculadas a la epistemología del conocimiento matemático o a las relativas a sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Con el fin de hacer explícitas estas últimas, se trabajan asociadas al concepto de tendencia didáctica (Contreras, 2009).

La identificación de las concepciones del profesor acerca de la matemática y de la enseñanza ocupa un lugar relevante en las investigaciones en Educación Matemática (Godino, 2004). Dichas concepciones, de acuerdo con Carrillo y Contreras (1995), actúan de filtro y elemento decodificador de las informaciones procedentes de otros ámbitos de investigación. En este sentido, por ejemplo, una concepción de la matemática como algo esencialmente instrumental o una concepción de la educación matemática tecnológica llevarían a una selección de contenidos distinta a la que se obtendría como consecuencia de una concepción dinámica de la matemática o una concepción investigativa de la matemática (Carrillo y Contreras, 1995).

Para este estudio, las concepciones de los profesores sobre el papel de los medios educativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática coinciden con el punto de vista de Carrillo y Contreras (1995), es decir, se asumen como el conjunto de posicionamientos que el investigador supone que posee el profesor de matemáticas.

Tendencias didácticas

En el desarrollo de las actividades que se trabajan en el aula, los docentes presentan diferentes formas de enseñanza que son predominantes en el desarrollo de su labor, las cuales, analizadas a la luz de algún referente teórico, se denominan tendencias didácticas, que permiten no sólo describir y explicar una realidad, sino también cómo intervenir en ella para transformarla (Porlán, 1995). De acuerdo con Contreras (2009), ningún profesor tiene una concepción pura en el desarrollo de su labor, muestra unos rasgos que pueden definirlo más en una tendencia que en otra.

Porlán (1992) propone cuatro tendencias didácticas que corresponden a otras tantas formas en que el profesor concibe la enseñanza y el aprendizaje de la matemática: tradicional, tecnológica, espontaneísta e investigativa.

Tendencia tradicional

De acuerdo con Porlán (1995), un sector del profesorado suele pensar que sólo hay una única manera de hacer las cosas en el aula, es decir, se identifican con el uso de la exposición magistral a los estudiantes de los contenidos esenciales de una determinada asignatura, procurando definir adecuadamente un significado correcto de éstos. Las actividades de los cursos son organizadas por los profesores en torno a una secuencia, en la que el estudiante registra por escrito la información suministrada con el fin de preparar los exámenes que intentarán medir su aprendizaje. Al respecto, Porlán (1995) afirma:

> La transmisión verbal de conocimiento es la forma habitual de enseñar en los centros educativos. Sin embargo, y a pesar de ello, se afirma que esta manera de enseñar, paradójicamente, no consigue, en gran parte de los casos, aquello que persigue: un aprendizaje adecuado de los alumnos (p. 146).

La asignatura de matemática está orientada hacia la adquisición de conceptos, en la que los estudiantes deben conocer un cierto "panorama matemático" que el docente espera que aprendan; lo que implica que el aprendizaje se realiza utilizando la memoria como único recurso (Contreras, 1998), lo que se encuentra en un modelo tradicional.

Para facilitar la atención y la disciplina, las ayudas educativas deben ser parecidas a la realidad, que permitan la percepción de manera que su presentación reiterada conduzca a la formación de imágenes mentales que garanticen el aprendizaje. Las reflexiones psicológicas de Pavlov, Watson y Skinner mostraron a los pedagogos tradicionales la conveniencia de utilizar y adecuar los recursos didácticos. La escuela tradicional comprendió que podía conservar su estructura, adecuando los recursos didácticos a sus propósitos.

Tendencia tecnológica

Se caracteriza por el desarrollo de una planificación bien detallada de las actividades que piensa desarrollar el docente en el aula. Se les da prioridad a los objetivos, ya que estos deben estar claros en la mente de la persona que va a enseñar, pues se consideran la base del currículo.

Los objetivos deben plantearse de manera ordenada de tal modo que se asimilen inicialmente los conocimientos más concretos para luego sí pasar al estudio de los más generales, es decir, se prioriza el trabajo inductivo dentro de la planificación de la clase.

El éxito del aprendizaje proyectado se garantiza con la organización en secuencias cerradas de actividades. Se cree en la homogenización del conocimiento, es decir, "los alumnos de inteligencia normal pueden seguir secuencias de actividades idénticas" (Porlán, 1995, p. 153). Lo anterior determina que un buen docente se caracteriza por elaborar correctamente secuencias de aprendizaje, aspecto que garantizaría el aprendizaje de todo el grupo. Por lo anterior, si el estudiante realiza bien la secuencia planteada por el docente, se garantiza su aprendizaje, es decir, el comportamiento del alumno frente a la secuencia es un referente evaluativo.

Otra característica del enfoque tecnológico es la realización de pruebas diagnósticas y terminales como manera de mirar los avances del estudiante. La prueba diagnóstica permite determinar el grado de conocimiento del estudiante sobre una temática y, por ende, plantear objetivos que permitan un avance en sus conocimientos, lo cual se corrobora por medio de la prueba terminal.

Para superar las dificultades en el logro de ciertos aprendizajes, es necesario apelar a las actividades de refuerzo planteadas con anterioridad por el profesor.

Los medios de enseñanza, en la tendencia tecnológica según Ortiz (2009), se consideran:

> Todos los componentes del proceso pedagógico que actúan como soporte material de los métodos con el propósito de lograr los objetivos planteados. Con esta forma de entender y de ubicar el lugar de los medios de enseñanza, se aprecia que los mismos sirven tanto a la labor pedagógica del profesor, como también al trabajo de los alumnos; desde el uso de los textos hasta el uso de una computadora, alternándose indistintamente la función de emisor y receptor en ambos sentidos (p. 53).

Tendencia espontaneísta

En el desarrollo de las diversas tendencias, en ocasiones se encuentran situaciones en las que el docente plantea actividades de manipulación de modelos mediante las cuales se espera como resultado un conocimiento no organizado. El trabajo se basa en los intereses que manifiestan los estudiantes y en la negociación con ellos, características que corresponden a un modelo espontaneísta.

En este modelo, la asignatura posee un carácter formativo con el objeto de servir de instrumento para un cambio actitudinal del alumno y para la adquisición de valores que permitan una actitud lógica ante los problemas cotidianos. El profesor piensa que se aprende, cuando el objeto de aprendizaje surge de manera espontánea del contexto y posee un significado para el alumno. El profesor debe preocuparse de que el alumno esté inmerso en situaciones que propician el descubrimiento. Los recursos que más se utilizan son los que permiten su manipulación.

Tendencia investigativa

En algunas ocasiones, el profesor desarrolla una propuesta en donde lo que interesa es el proceso que desarrolla el estudiante para la adquisición de conceptos, como los procedimientos y las actitudes hacia el trabajo escolar, mediante la investigación. Los objetos de aprendizaje, además de poseer un significado, se pueden aplicar a contextos diferentes de aquellos en los que fueron aprendidos. La tendencia investigativa según Contreras (2009) tiene como principio didáctico la investigación, que se encuentra integrada por los aportes de la psicología constructivista y una concepción compleja de la realidad educativa. El uso de los medios educativos permite el trabajo en grupo y la reflexión en el análisis de los procesos realizados y sus resultados.

Medios educativos

Los recursos y material didáctico en esta investigación se denominaron medios educativos, los cuales son parte integrante de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Estos son utilizados en los procesos comunicativos de la clase para facilitar la relación entre profesor-alumno-conocimiento, es decir, pueden ser potenciadores de habilidades prácticas e intelectuales en los estudiantes.

Según Godino (2003), se puede considerar como material didáctico cualquier medio o recurso que se utiliza en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esa categoría se incluyen objetos diversos, como manuales escolares en su versión escrita, grabaciones en video, programas de ordenador, los propios dedos de las manos, piedrecitas y calculadoras, entre otros. Para comprender mejor la importancia del material didáctico y con el objeto de clarificar las ideas, Godino propone una clasificación para añadir a las existentes:

- Ayudas de estudio: recursos que apoyan directamente la función del profesor (organización del contenido de enseñanza, presentación de problemas, ejercicios, conceptos, pruebas de autoevaluación, programas tutoriales de ordenador). Básicamente se incluyen los manuales escolares en sus diversas presentaciones.
- Instrumentos (semióticos) para el razonamiento matemático: objetos físicos tomados del entorno o específicamente preparados, así como materiales gráficos, textos, palabras, los cuales pueden funcionar como medios de expresión, exploración y cálculo en el trabajo matemático. Se refiere a ellos con el nombre genérico de manipulativos, aunque se distinguen en "manipulativos tangibles", que ponen en juego la percepción táctil, y "manipulativos gráfico-textuales-verbales", en los que participan la percepción visual y auditiva. Es importante reconocer que los materiales propiamente manipulativos (tangibles) desempeñan funciones simbólicas y que los medios textuales y gráficos también son "manipulables".

De acuerdo con Passos (2006), los medios educativos en las clases de matemáticas deben servir como mediadores en el momento en que un concepto se está reconstruyendo. Para Lorenzato (2006), la actitud del profesor frente a la utilización de los medios educativos es importante, ya que las consecuencias pueden ser positivas si son los estudiantes quienes los manipulan, realizan sus propias observaciones y obtienen sus conclusiones.

El modo de utilizar el material didáctico depende en gran medida de la concepción que el profesor tenga respecto a la matemática y la enseñanza. Por ejemplo, un profesor que concibe la matemática como un conjunto de proposiciones deducibles con la ayuda de definiciones, donde sus resultados son reglas y fórmulas que sirven para resolver ejercicios y exámenes, usaría el marcador y el tablero.

En las instituciones educativas de la ciudad de Tunja son escasos o insuficientes los medios educativos para matemáticas y rara su utilización en clase. Últimamente se está trabajando con los medios tecnológicos y la incorporación de computadoras y tabletas. Sin embargo, como señalan Flores, Lupiánez, Berenguer, Martín y Molina (2011), es importante dar un lugar en el aula al uso de materiales y recursos manipulativos, ya que son una ayuda importante para el aprendizaje de los alumnos.

La utilización de material educativo en matemáticas busca facilitar el aprendizaje, de acuerdo con las características de los medios. Según Flores, Gómez y Marín (2013), el profesor tiene que tener criterios para seleccionar el medio educativo más adecuado para la situación que se va a trabajar en el aula y, a la vez, establecer su contribución a las finalidades de aprendizaje.

METODOLOGÍA

Se tomó como base la investigación cualitativa porque a través de ésta se pueden comprender y profundizar los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes (individuos o grupos pequeños de personas), en un ambiente natural y en relación con el contexto, lo que permite analizar las conductas que son factibles de ser observadas, considerar lo que piensan, actitudes y comportamientos (Hernández, Fernández y Baptista, 2010).

El diseño investigativo con el que se abordó el trabajo fue el estudio de caso. Yin (2009) establece una clasificación, en la que tiene presente dos factores: número de casos y clase de unidad de análisis. Para el presente estudio, se trabajó respecto a número de casos con la tipología de varios casos y en relación con unidad de análisis, la holística, todo el caso tomado como una sola unidad de análisis.

La investigación se desarrolló en dos instituciones educativas de la ciudad de Tunja, una de carácter privado y otra oficial, en la que participaron tres y cuatro docentes, respectivamente, quienes orientaron la asignatura de matemáticas en los grados de octavo a once.

Los profesores que colaboraron voluntariamente en el estudio se caracterizan en el cuadro 1.

Para el análisis de las concepciones de los profesores sobre el papel de los medios educativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, se trabajó con las siguientes categorías y criterios: (M) metodología (la planeación, los objetivos y la práctica); (SA) sentido de la asignatura (orientación y finalidad); (CA) concepción de aprendizaje (tipo y forma, tipo de trabajo, dinamizador, aptitud y actitud); (PP) papel del profesor (qué hace, cómo lo hace, por qué lo hace y la coordinación); (PA) papel del alumno (participación en el diseño didáctico, participación en los procesos de aula), y (E) evaluación (carácter e instrumentos), las cuales fueron trabajadas en la tesis doctoral de Contreras (1998). Para el estudio, se agregó (PM), el papel de los medios educativos (finalidad, criterios generales de uso y su relación con los elementos de análisis anteriores).

Cuadro 1. Características de los docentes que participaron en el estudio

Instituto	Caso	Género	Experiencia	Formación	Postgrado
P	D1	M	24 años	Licenciado en Matemáticas y Física	Administración Educativa-Evaluación
	D2	F	4 años	Licenciado en Matemáticas	Especialización en necesidades de aprendizaje en lectura, escritura y matemáticas
	D3	F	3 años	Licenciada en Matemáticas	
O	D4	M	35 años	Licenciado en Matemáticas y Física	Especialista en computación para la docencia
	D5	F	15 años	Licenciado en Matemáticas y Física	Mg. Matemáticas y Estadística Aplicada
	D6	F	4 años	Licenciado en Matemáticas	
	D7	F	2 años	Licenciado en Matemáticas	

Fuente: elaboración propia.

Para la recolección de la información, se utilizaron varias fuentes: *a)* cuestionario relacionado con las concepciones enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; *b)* observación no participante, realizada a partir de la grabación de algunas sesiones de clase. La revisión de los planeadores de clase se utilizó para analizar la programación de las actividades por desarrollar y fue uno de los aspectos importantes que se consideraron en el análisis de las clases. Los resultados se analizaron teniendo presente los aspectos relacionados en las categorías mencionadas; cada una dio lugar a la obtención de información individual de cada caso estudiado y global del grupo sobre la Institución Educativa. La información resultante del análisis de las categorías permitió conocer la tendencia didáctica en la que se encuentran los docentes que formaron parte del estudio y, por ende, las concepciones de los docentes acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

RESULTADOS

Las fases que se consideraron para el análisis de los datos son las siguientes: *a)* interpretación de las respuestas al cuestionario relacionado con la concepción de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, el cual es de tipo cerrado y es propuesto por Contreras (1998), y permite obtener un primer panorama de la tendencia didáctica que cada docente posee; *b)* contrastar y complementar los resultados obtenidos en el cuestionario anteriormente descrito con lo que sucede en el aula mediante el análisis de videos de clases y revisión de los planeadores. Finalmente, se hace un cruce de información y se obtiene una aproximación de la concepción asociada a la tendencia didáctica de cada docente, en la que se resalta en cada caso el papel de los medios educativos en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Presentación de un estudio de caso

Por espacio y para comprender el trabajo realizado, se va a describir un caso, el del docente D1, para posteriormente presentar la síntesis de todos los casos.

Se continúa con la presentación, análisis e interpretación de los resultados obtenidos en los instrumentos utilizados en el estudio:

a) Análisis e interpretación de los resultados del cuestionario

El cuestionario que se aplicó fue tomado de la tesis doctoral de Contreras (1998, p. 139) y consta de 49 preguntas de tipo cerrado, las cuales se encuentran organizadas en 35 indicadores para cada una de las cuatro tendencias correspondientes a los criterios estudiados de cada una de las categorías. En cada ítem el docente tenía que otorgar de 1 a 5 según el grado de conformidad (total desacuerdo-total acuerdo) con lo propuesto, lo cual se analiza y tipifica según lo planteado por Contreras.

En el cuadro 2 se presentan los resultados obtenidos por el docente D1 en cada una de las categorías analizadas.

Se presenta ahora una descripción de los aspectos asociados a lo planteado en el cuadro por el docente D1.

Cuadro 2. Análisis de los resultados obtenidos por el docente D1 en el cuestionario

Categoría	Criterios	Tradicional	Tecnológica	Espontaneísta	Investigativa
Metodología	Planeación	X	X		
	Objetivos	X			
	Práctica	X	X		
	Total	**3**	**2**		
Sentido de la asignatura	Orientación	X	X		
	Finalidad	X	X		
	Total	**2**	**2**		
Concepción del aprendizaje	Tipo y forma		X		
	Tipo de agrupamiento	X	X		
	Dinamizador	X	X		
	Aptitud	X	X		
	Actitud		X		
	Total	**3**	**5**		
Papel del alumno	Participación en el diseño didáctico	X	X		
	Participación en los procesos de aula		X		
	Qué hace	X	X		
	Total	**2**	**3**		
Papel del profesor	Qué hace		X		
	Cómo lo hace		X		
	Por qué lo hace	X			
	Coordinación		X		
	Total	**1**	**3**		
Evaluación	Carácter	X			
	Criterios	X			
	Instrumentos	X			
	Total	**3**			
Medios educativos	Finalidad		X		
	Criterios generales	X	X		
	Total	**1**	**2**		

Fuente: elaboración propia.

Metodología
De acuerdo con lo anterior y basados en la tipología de Contreras (1998), se puede afirmar que el docente en su planificación sigue de manera secuencial la estructura planteada en el plan de área de la Institución; los objetivos que desarrolla en su trabajo son conceptuales de carácter terminal; la actividad que realiza en el aula se caracteriza por repetición iterada de ejercicios en los que busca a la vez que los estudiantes imiten los procesos lógicos explicados en la clase. En el análisis de la metodología, se ubica al docente en una tendencia tradicional con rasgos tecnológicos.

Sentido de la asignatura
La asignatura está orientada exclusivamente hacia la adquisición de conceptos y reglas, y tiene una finalidad informativa. El profesor hace énfasis en el interés tanto de los conceptos y reglas como de los procesos lógicos que son sustentados por su eventual reproductibilidad. El contenido matemático que se moviliza en el aula no se diferencia en estructura, aunque sí en el nivel de abstracción del conocimiento matemático formal.

Concepción de aprendizaje
El profesor concibe de una manera memorística secuencial el aprendizaje, el cual está organizado internamente según la lógica estructural de la disciplina. Aunque se pueda comenzar por la observación de un proceso inductivo, se considera que el verdadero aprendizaje se apoya en un proceso deductivo. El alumno conoce los temas porque el docente es quien se los presenta. La forma de trabajo que propicia el aprendizaje es la exposición del profesor.

Papel del alumno
El alumno no participa en el diseño de las actividades; el proceso de enseñanza está dado por la explicación que brinda el docente de los contenidos preestablecidos, los cuales son seleccionados en orden, secuencia e importancia, conservando la lógica formal de la disciplina, donde el estudiante atiende y cree lo que se trasmite de una manera organizada para imitar luego el proceso lógico explicado.

Papel del profesor
El docente, por ser un técnico del contenido, expone los contenidos a los estudiantes con el fin de que puedan ver la simulación de algunos conceptos matemáticos, y busca que el estudiante se involucre en su proceso de aprendizaje.

Evaluación

El profesor concibe la evaluación como una actividad que se debe realizar al final de cada una de las partes en las que divide el aprendizaje del alumno con el único fin de medirlo. Se reduce a términos numéricos la adecuación de los resultados finales de aprendizaje. La valoración se considera subjetiva. Se realiza una medición de la memoria a corto plazo. La tendencia del docente en la parte relacionada con la evaluación se encuentra en un enfoque tradicional.

Medios educativos

El docente concibe el papel de los medios educativos, como un factor que permite la motivación e interés de los alumnos, pero al decidir el medio con el que se trabaja, lo que interesa es que sea un material de apoyo para él.

Cuadro 3. Resumen de las tendencias del docente D1 en cada categoría en el cuestionario

Categoría	Tendencia
Metodología	Tradicional con rasgos tecnológicos
Sentido de la asignatura	Tradicional/Tecnológica
Concepción del aprendizaje	Tecnológica con rasgos tradicionales
Papel del alumno	Tecnológica con rasgos tradicionales
Papel del profesor	Tecnológica con rasgos tradicionales
Evaluación	Tradicional
Medios educativos	Tecnológica con rasgos tradicionales

Fuente: elaboración propia.

En conclusión, la concepción que el profesor cree que maneja dentro de su aula de clase corresponde a una tendencia tecnológica con rasgos tradicionales.

b) Análisis e interpretación de los resultados del proceso de observación no participante

Se observaron dos clases de cada docente. Para el caso se describe las relacionadas con el profesor D1. Las matrices de observación de cada clase se cruzaron y se obtuvo como resultado lo planteado en el cuadro 4.

Cuadro 4. Análisis e interpretación de los resultados obtenidos en la observación del docente D1

Categoría	Descripción
Metodología	La técnica habitual aplicada en las sesiones de clase es la exposición magistral de los contenidos matemáticos, los cuales eran extraídos siempre del libro de texto. Los ejercicios y problemas eran explicados por el profesor con el fin de que los estudiantes atendieran y copiaran el procedimiento realizado por él; en una de la sesiones hizo entrega de material fotocopiado de un libro de texto, donde se encontraban una serie de ejercicios que los estudiantes debían resolver en clase y a la vez reproducir los procesos lógicos mostrados por el profesor.
	La aplicabilidad al contexto de los temas trabajados es baja, ya que no se hacen propuestas del docente y los textos son elaborados con una generalidad que en algunos casos ni siquiera corresponde con el entorno colombiano. En algunas instituciones se cuenta con computadoras y tabletas, pero muy rara vez son utilizados por los profesores del área.
Sentido de la asignatura	Se observa en el profesor el interés por trabajar con los estudiantes tanto conceptos y reglas como procesos lógicos que los sustentan. La resolución de los ejercicios consistía en reproducirlos y desarrollar otros muy similares. La orientación brindada en el desarrollo de las clases fue de carácter informativo, donde los alumnos debían conocer un cierto contenido matemático que se esperaba aprendieran; en algunos casos, los contenidos que se trabajaron en las diferentes sesiones tenían también carácter práctico, que permitían al estudiante ver la aplicación de la matemática en otros campos.
Concepción del aprendizaje	El docente concibe el aprendizaje como mecánico, por lo cual presentaba una serie de ejercicios con el mismo patrón lógico para que los estudiantes fijaran esta estructura. En la clase se hacía mucho énfasis en la reproducción. En algunos casos se exponía la temática por medio del video *beam*, con la proyección de algunas diapositivas, para buscar motivar al estudiante.
Papel del alumno	Reproducía lo desarrollado por el docente en la clase, desarrollaba ejercicios similares, aprobaba con respuestas cortas lo planteado por el profesor.
Papel del profesor	El profesor aplica en el desarrollo de la clase la estructura que planteó en su planeador, planteando los ejercicios que allí propuso y que fueron tomados de los libros de texto.
	El profesor toma la tarea propuesta en la clase anterior, explica el nuevo tema, desarrolla ejemplos y propone ejercicios muy similares. Posteriormente, evalúa ya sea con preguntas orales o prueba escrita. Culmina la clase proponiendo ejercicios para la siguiente sesión de clase.

Cuadro 4. Análisis e interpretación de los resultados obtenidos en la observación del docente D1

Categoría	Descripción
Evaluación	Al finalizar las clases, el docente plantea preguntas, ya sea en forma oral o escrita, con el fin de evaluar a sus estudiantes.
Medios educativos	Por lo general, no utiliza material adicional, aunque en ocasiones facilita fotocopias a los estudiantes o hace presentaciones en video *beam*. Los materiales utilizados en su clase fueron: libro de texto, fotocopias, video *beam* y calculadora.
	A continuación se presenta un fragmento donde se menciona la finalidad con que el docente utiliza los medios educativos en la clase:
	D1: Para desarrollar una clase diferente, innovadora, donde se cree interés por parte de los estudiantes, hacia la asignatura (Pregunta de ampliación D1, agosto, 2014).

Fuente: elaboración propia.

Cuadro 5. Resumen de las tendencias del docente D1 en cada categoría en su clase

Categoría	Tendencia
Metodología	Tecnológica con rasgos tradicionales
Sentido de la asignatura	Tecnológica con rasgos tradicionales
Concepción del aprendizaje	Tecnológica con rasgos tradicionales
Papel del alumno	Tradicional
Papel del profesor	Tecnológica con rasgos tradicionales
Evaluación	Tecnológica con rasgos tradicionales
Medios educativos	Tecnológica con rasgos tradicionales

Fuente: elaboración propia.

La descripción anterior, a la luz de las tendencias didácticas propuestas por Porlán (1995), permite concluir lo propuesto en el cuadro 5.

En relación con lo observado en el desarrollo de las sesiones de clase del profesor D1, se puede afirmar que este actúa dentro del marco de una tendencia tecnológica con rasgos tradicionales.

Análisis comparativo de instrumentos y comentarios

Obsérvese que, efectivamente, el profesor D1 en su práctica docente no presenta una única tendencia didáctica, lo cual coincide con los resultados obtenidos por Contreras (2009).

Las tendencias didácticas propuestas por Porlán (1995) son un buen marco para describir el actuar del profesor D1, ya que permitieron su clasificación.

El profesor mencionado utilizó los medios educativos como ayudas de estudio (Godino, 2003), ya que fueron soporte de su labor docente, más no se privilegió su uso para facilitar el aprendizaje del alumno.

En general, el docente D1, tanto en su pensamiento como en su actuar, se ubica entre las tendencias tecnológicas y tradicionales, ya que coincide en las categorías de sentido de la asignatura, aprendizaje, papel del profesor y medios educativos. Sin embargo, el énfasis entre las dos tendencias didácticas mencionadas cambia en cuanto a la metodología, evaluación y papel del estudiante.

Generalización de los resultados obtenidos de los casos

El análisis que se hizo al profesor D1 también se realizó con los otros seis profesores.

A continuación, se presenta directamente la tendencia didáctica de cada docente asociada con sus concepciones y actuar en el aula (cuadro 6).

Al analizar los resultados de los docentes D2, D5, D6 y D7, se concluye que presentan un modelo tradicionalista con algunas características tecnológicas. Los docentes realizan exposición magistral del contenido matemático para buscar la adquisición de conceptos, donde se espera que se aprenda una temática. Los alumnos escuchan, copian, atienden y aceptan los contenidos que se brindan en la asignatura. La utilización que dan a los medios educativos en matemáticas es la relacionada como soporte y apoyo para fijar los conceptos trabajados en clase, en ocasiones para motivar y despertar el interés de los estudiantes

Cuadro 6. Tendencia didáctica de los profesores del estudio

Institución educativa	Docente	Cuestionario	Observación y grabación	Tendencia
Privada	D1	Tecnológico con rasgos tradicionales	Tecnológico con rasgos tradicionales	Tecnológico
	D2	Tradicional con rasgos tecnológicos	Tradicional con rasgos tecnológicos	Tradicional
	D3	Tradicional con rasgos tecnológicos	Tecnológico con rasgos tradicionales	Tecnológico
Oficial	D4	Tradicional con rasgos tecnológicos	Tecnológico con rasgos tradicionales	Tecnológico
	D5	Espontaneísta	Tradicional con rasgos tecnológicos	Tradicional
	D6	Espontaneísta	Tradicional con rasgos tecnológicos	Tradicional
	D7	Tradicional con rasgos tecnológicos	Tradicional con rasgos tecnológicos	Tradicional

Fuente: elaboración propia.

hacia el trabajo de la asignatura. Los medios de mayor frecuencia son el tablero, las calculadoras, equipo de geometría, libros de texto y fotocopias.

De los resultados obtenidos por los docentes D1, D3 y D4, se concluye que se encuentran en una tendencia tecnológica con rasgos tradicionales y se observa coincidencia con las características teóricas. Los profesores realizan una planificación muy detallada de sus clases, plantean unos objetivos operativos claros y medibles, exponen los contenidos a sus estudiantes, quienes atienden, creen, copian e imitan los procesos realizados por los docentes.

Para el caso de los docentes D3 y D4, aunque creen que son profesores tradicionales, su actuar corresponde más a una tendencia tecnológica; de la misma manera, los docentes D5 y D6 creen que su trabajo está en la tendencia espontaneísta, pero sus prácticas pedagógicas de aula corresponden a tendencias tecnológica y tradicional, respectivamente.

En cuanto a los medios educativos, estos profesores piensan que su uso permite la motivación, son un apoyo invaluable para su labor docente, facilitan la memorización por parte del estudiante.

CONCLUSIONES

Los resultados de la investigación descrita evidencian que los docentes suelen utilizar los medios educativos como herramienta motivacional que permite despertar en los estudiantes el interés por la asignatura, la mecanización de los conceptos y apoyo al docente. Es decir que utilizan los medios educativos como ayudas de estudio (Godino, 2003).

En cada una de las categorías analizadas: metodología, sentido de la asignatura, concepción del aprendizaje, papel del alumno y del profesor, evaluación y el papel de los medios educativos, se encuentra que, en los docentes del sector privado, prima la tendencia tecnológica, mientras que, en el sector oficial, predomina la tradicional. En general, resalta la tendencia tradicional con rasgos tecnológicos como la más generalizada en esta investigación.

En todos los casos, se determinó que los docentes no se identifican con una única tendencia didáctica, sino que, por el contrario, tienen rasgos característicos de varias tendencias, sólo que sí prima una de ellas, aspecto que coincide con Contreras (2009).

En 57% de los docentes no coincide lo que piensan con lo que hacen (cuadro 6), lo que significa que la mayoría de los profesores del estudio no son conscientes de su acción pedagógica.

En el análisis de los casos, es posible señalar algunos elementos significativos de cada una de las categorías en la descripción de sus concepciones, como:

Metodología: el desarrollo de las actividades que se realizan en el aula está caracterizado por reproducir los procesos lógicos, donde la técnica habitual aplicada en las sesiones de clase es la exposición de los contenidos matemáticos.

Sentido de la asignatura: interesan los conceptos y las reglas como los procesos lógicos y de memorización, que permitan la aplicación en otras áreas.

Concepción del aprendizaje: de manera general, se concibe memorístico secuencial, organizado por la estructura del contenido y las actividades planteadas al alumno.

Papel del alumno: participa en el desarrollo de las actividades propuestas en el aula, sigue las instrucciones del profesor, carece de autonomía.

Papel del profesor: planifica las clases planteando objetivos operativos, organiza los contenidos por trabajar en cada una de las sesiones de clase mediante exposición, utiliza estrategias que permiten la transmisión del conocimiento.

Evaluación: es vista como una medición sobre la adquisición de los conocimientos de los estudiantes.

Papel de los medios educativos: se utilizan básicamente como apoyo para exposición del docente y como ayuda a la memorización del estudiante.

Prospectiva

Surge ahora la necesidad de contestar la pregunta: ¿Cómo cambiar estas tendencias tradicionales y tecnológicas de los profesores del estudio hacia unos modelos que estén más centrados en el estudiante, como el constructivismo?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alsina, A. (2006), *Desarrollo de competencias matemáticas con recursos lúdico-manipulativos. Para niños y niñas de 6 a 12 años*, 2a. ed., Madrid, Narcea Ediciones.

Carrillo, J. (1996), *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigacióny estudio de posibles relaciones*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, Departamento de Didáctica de las Ciencias, publicada por la Universidad de Huelva. Recuperada de http://www.uhu.es/luis.contreras/tesis2/INTRO.HTM.

Carrillo, J. y L. Contreras (1995), "Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza", *Educación Matemática*, vol. 7, núm. 3, pp. 79-92.

Contreras, L. (1998), *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula*, Tesis doctoral, Universidad de Huelva, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Huelva, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva. Recuperada de http://rabida.uhu.es/dspace/handle/10272/2953.

——— (2009), "Concepciones, creencias y conocimiento. Referentes de la práctica profesional, *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencia y Tecnología*, vol. 1, núm. 1, pp. 11-36. Recuperado de http://www.exactas.unca.edu.ar/riecyt/Vol%201%20Num%201.htm.

Contreras, L. y J. Carrillo (1998), "Diversas concepciones sobre resolución de problemas en el aula", *Educación de Matemática*, vol. 10, núm. 1, pp. 26-27.
Fiorentini, D. y M. Miorim (1990), "Uma reflexão sobre o uso dos materiais concretos e jogos no ensino da matemática", *Boletim da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, año 4, núm. 7, pp. 5-10.
Flores, P., P. Gómez y A. Marin (2013), *Apuntes sobre análisis de instrucción. Módulo 4 de MAD,* documento inédito (Documentación), Bogotá, Universidad de los Andes. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2061/
Flores, P., J. L. Lupiánez, L. Berenguer, A. Martín y M. Molina (eds.) (2011), *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*, Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1946/1/libro_MATREC_2011.pdf.
Godino, J. D. (2003), "Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas", en J. Godino, *Investigaciones sobre fundamentos teóricos y metodológicos de la educación matemática*, Granada, España, Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, pp. 198-208. Obtenido de http://www.ugr.es/~jgodino/
Godino, J. D. (2004), *Matemáticas y su didáctica para maestros*, Universidad de Granada, Didáctica de la Matemática, Granada, España, Proyecto Edumat-Maestros. Recuperado el 28 de junio de 2013 de http://www.ugr.es/~jgodino/
Hernández, R., C. Fernández y L. Baptista (2010), *Metodología de la investigación*, 5a. ed., México, McGraw-Hill.
Jiménez, A. (2010), "La naturaleza de la matemática, sus concepciones y su influencia en el salón de clase", *Educación y Ciencia*, Colombia, núm. 13, pp. 135-150.
Lorenzato, S. (2006), "Laboratório de ensino de matemática e materiais didático manipuláveis", en S. Lorenzato, *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*, Campinas, Brasil, Autores Associados (Coleção formação de professores), pp. 3-38.
Luna, C. (2007), *Las matemáticas en la escuela secundaria*, Tesis de Maestría, Instituto Michoacano de Ciencias de la Educación "José María Morelos", México.
Monge, A. y R. Vallejos (2012), *El uso del juego como mediador del conocimiento matemático a partir de las experiencias docentes*. Recuperado de http://www.cientec.or.cr/matematica/2012/ponenciasVIII/Adolfo-Monge.pdf
Ortiz, A. (2009), *Manual para elaborar el modelo pedagógico de la institución educativa*, Barranquilla, Colombia, Antillas.

Parcerisa, A. (2007), "Materiales para el aprendizaje, más allá del libro de texto... y de la escuela", *Revista Aula de Innovación Educativa*, núm. 165. Recuperado de http://www.grao.com/revistas/aula/165-los-materiales-recurso-para-el-aprendizaje/materiales-para-el-aprendizaje-mas-alla-del-libro-de-texto--y-de-la-escuela

——— (2010), "Los materiales didácticos como recurso en la acción comunitaria", en M. Área, A. Parcerisa y J. Rodríguez (coords.), *Materiales y recursos didácticos en contextos comunitarios*, España, GRAÖ, pp. 15-29.

Passos, C. (2006), "Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática", en Lorenzato (org.), *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*, Campinas, Brasil, Autores Associados, pp. 77-92.

Porlán, R. (1992), "El currículo en acción", en autores varios, *Teoría y práctica del currículo*, Madrid, Ministerio de Educación y Ciencia.

Porlán, R. (1995), *Constructivismo y escuela. Hacia un modelo de enseñanza-aprendizaje basado en la investigación*, 2ª. ed., Sevilla, Díada Editora.

Schön, D. (1983), *The reflective practitioner. How professionals think in action*, Nueva York, Basic Books.

Thompson, A. G. (1992), "Teacher's beliefs and conceptions: A synthesis of the research", en D. A. Grouws (ed.), *Handbook on mathematics teaching and learning*, Reston, VA, National Council of Teachers of Mathematics, pp. 127-146.

Yin, R. K. (2009), "Case study research: Design and methods", en *Applied social research methods series*, vol. 5, 4a. ed., California, Sage Publications.

DATOS DE LOS AUTORES

José Francisco Leguizamón Romero
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia
jleguizamom_romero@hotmail.com
francisco.leguizamon@uptc.edu.co

Olga Yanneth Patiño Porras
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia
olye2002@hotmail.com
olga.patino@uptc.edu.co

Publio Suárez Sotomonte
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Colombia
psuarez2002@hotmail.com
publio.suarez@uptc.edu.co

La construcción de circunferencias tangentes. Estudio teórico desde una perspectiva heurística

Liliana Siñeriz y Trinidad Quijano

Resumen: En este artículo describimos un estudio teórico del proceso de resolución de una situación abierta en el marco de una investigación centrada en las construcciones geométricas. Por un lado, nos proponemos mostrar la multiplicidad de aspectos inherentes al planteamiento y resolución de problemas a partir de ella. Por otro lado, pretendemos aportar algunas pautas o sugerencias al organizar la enseñanza que lleven a rescatar los métodos y heurísticas que subyacen al resolverla, y promover la generación de nuevos problemas desde procesos de elaboración y contrastación de conjeturas a través de la exploración.

Palabras clave: construcciones, resolución de problemas, planteamiento de problemas, métodos heurísticos, fases.

The construction of tangent circumference. Theoretical study from a heuristic perspective

Abstract: This paper describes a theoretical study of the process of solving an open situation, in the framework of a research focused on geometric constructions. On one hand, we intend to show the multiplicity of aspects inherent to posing and solving problems from it. On the other hand, our aim is to provide some guidelines or suggestions to organize how to teach, in order to rescue methods and heuristics that underlie when it is solved, and to promote the generation of new problems arising from processes to develop and test conjectures by means of exploration.

Keywords: constructions, problem solving, problem posing, heuristics methods, phases.

Fecha de recepción: 27 de noviembre de 2014; fecha de aceptación: 2 de septiembre de 2015.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo abordamos una situación problemática que forma parte de un estudio más amplio, en el que se indagan los procesos de aprendizaje de las construcciones geométricas en la formación de profesores.[1]

La investigación desarrollada en el proyecto marco está centrada en los problemas de construcción, por ser estos un dominio propicio tanto para realizar exploraciones empíricas que llevan a formular conjeturas y producir argumentos de validación como para trabajar modos y medios de resolución que hacen a los problemas más abordables y que pertenecen al terreno de la heurística.

La situación abierta que vamos a analizar fue planteada con diferente intencionalidad en asignaturas de distinta índole: "Didáctica Especial y Residencia" y "Seminario de la Enseñanza de la Matemática", ambas pertenecientes al último año del Profesorado de Matemática en el Centro Regional Universitario Bariloche de la Universidad Nacional del Comahue. En Siñeriz y Quijano (2014), hemos interpretado las producciones de los alumnos de Seminario en torno a dicha situación, a la luz de las estrategias y métodos que habían sido objeto de enseñanza.

En este artículo presentamos una organización teórica del proceso de resolución estructurada en fases, que puede resultar un referente útil al planificar la enseñanza, ya sea en esta o en otras situaciones abiertas. Realizamos un análisis de la situación desde una perspectiva heurística, orientada a explicitar los métodos y estrategias que subyacen al resolverla, así como también a promover la generación de problemas a partir de la propia situación, el examen de las soluciones y la extensión de dicha situación abierta. Comenzamos haciendo una breve alusión al marco teórico de referencia para luego centrarnos en el análisis que constituye el núcleo de esta publicación.

[1] Proyecto de investigación 04/B189, desarrollado en el Centro Regional Universitario Bariloche (CRUB), aprobado y subsidiado por la Secretaría de Investigación de la Universidad Nacional del Comahue. 2014-2017.

MARCO TEÓRICO

Sobre el planteamiento de problemas

Las actuales orientaciones curriculares subrayan la importancia de la resolución de problemas abiertos en la clase de Matemática, los cuales admiten diferentes respuestas y dan lugar a la formulación de nuevas preguntas, así como a la construcción de estrategias personales de resolución. Rescatamos la potencialidad de las situaciones abiertas en la práctica escolar en cuanto a que favorecen el planteamiento de problemas y el trabajo de carácter empírico que lleva a elaborar conjeturas, contrastarlas y validarlas.

Diversos autores promueven el empleo de este tipo de actividades para crear entornos de aprendizaje que lleven a poner en práctica aspectos de la actividad matemática. Butts (1980) establece una tipología de problemas según el grado de creatividad necesario para abordarlos y, en la categoría de "situación problemática", encuadra aquellas situaciones en cuyo enunciado no se han delimitado los problemas inherentes a ella y esa es una de las tareas a cargo del resolutor. Brown y Walter (1983) distinguen dos aproximaciones para enunciar problemas, llamadas "aceptando" y "cambiando", a partir de determinadas preguntas generadoras de problemas. La primera consiste en mantener lo dado en la exploración y considerar una serie de cuestiones generales, que trascienden a un contenido específico, por ejemplo, *¿Qué es constante? ¿Qué es variable? ¿Hay solución? ¿Hay un caso límite?* En la segunda, la forma de plantear problemas a partir de un problema es a través de la pregunta *¿Qué pasaría si...?* de manera sistemática, modificando las partes principales de este, examinando las propiedades que caracterizan los objetos matemáticos implicados y considerando otras, explorando el efecto de los cambios y buscando explicaciones a lo que ocurre. En consonancia con esta línea, Skovsmose (2000) plantea organizar el trabajo alrededor de proyectos e introduce la noción de "escenario de investigación" como una situación que permite a los estudiantes formular preguntas y buscar explicaciones, y señala posibles formas de intervención docente, tales como *¿Qué pasa si...? ¿Qué sucede si...? ¿Por qué es que...?* para involucrarlos en un proceso de exploración y búsqueda de argumentos.

Entendemos que el proceso de resolución de problemas no es independiente del de plantearlos y en este sentido consideramos estas líneas de trabajo al abordar la situación abierta que es objeto de estudio.

Sobre las fases de resolución

El examen del proceso de resolución de problemas a partir de las fases por las que transitaría un resolutor ideal (Siñeriz, 2000) también es un referente para el análisis que presentamos. Asumimos que el proceso de resolución de problemas no se compone de conductas aisladas, sino que estas tienen un sentido respecto a la totalidad del proceso, lo que lleva a distinguir fases con objetivos específicos. Desde este punto de vista, las fases propuestas en Polya (1965) pueden ser un medio para organizar dicho proceso y, por ende, un elemento que considerar al planificar la enseñanza en resolución de problemas, razón por la cual constituyen un componente esencial en el análisis teórico que desarrollamos en este trabajo.

Atendiendo a los objetivos de cada una de ellas, podemos caracterizarlas de manera sintética: la fase de *comprensión* estaría orientada a percibir la idea global del problema por resolver, entender cuáles son sus partes principales y realizar una formulación propia de este. En la *elaboración del plan*, se estaría focalizando el estado de conocimientos con vistas a seleccionar heurísticas y reformular el problema acorde con ellas. La *ejecución del plan* sería la puesta en marcha del esquema de solución, siguiendo pautas que permiten su implementación en forma ordenada. La *visión retrospectiva* no sólo consistiría en volver sobre lo hecho para revisarlo, sino también en ir más allá de lo que pide el problema original, por lo que en ella estaría contemplada tanto la revisión como la extensión del problema.

En este estudio, interpretamos las fases en relación con la situación abierta, sin perder de vista todos y cada uno de los problemas que provienen de la exploración de los datos y las condiciones que en ella se plantean.

Sobre métodos heurísticos de resolución

Los *métodos* implicados en la resolución de problemas de construcción llevan a una transformación del problema original de manera estándar; sin embargo, los situamos en el terreno de la heurística, ya que no garantizan su solución, sino que lo transforman en construcciones o problemas más abordables.

Extrapolamos algunos resultados de una investigación anterior (Siñeriz, 2000), donde se analiza la actuación competente al enseñar a resolver problemas de regla y compás y se diferencian los métodos de acuerdo con su función dentro del proceso de resolución: como medio de organización o como medio de resolución. En este trabajo rescatamos, por un lado, el *Método de análisis síntesis* para organizar dicho proceso y, por el otro, el *Método de los dos lugares*, puesto que es el que subyace en la resolución de la situación abierta que analizamos.

La caracterización del *Método de análisis síntesis* puede encontrarse en el libro XIII de los Elementos (Euclides, 1991, libros X-XIII, p. 314). El análisis es el camino que lleva desde la incógnita a los datos, estableciendo progresivamente sus relaciones mutuas; la *síntesis* es el camino contrario, que va desde los datos hasta la incógnita. En este estudio, el *análisis* se refleja tomando la *figura de análisis* como punto de partida. Esta figura es un dibujo a mano alzada de la incógnita, donde se remarca lo dado y, a partir de ella, se analizan los resultados intermedios que habría que plantearse para determinarla. La *síntesis* consiste en efectuar la construcción que permite determinar la incógnita.

El *Método de los dos lugares*, al que aludiremos en un próximo apartado, es uno de los tres métodos presentados en forma general en Polya (1962-1965) y en detalle en la investigación mencionada, los cuales pueden ser utilizados para resolver una variedad de problemas de construcción geométrica.

ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN ABIERTA

La riqueza de la situación abierta que es objeto de estudio radica en que puede ser abordada con conocimientos elementales de geometría, mediante distintas aproximaciones e involucrando diferentes tópicos curriculares (posiciones relativas entre circunferencias, lugares geométricos, triángulos, etc.). Asimismo, a partir de ella, podemos generar varios problemas que pueden analizarse en conjunto de modo de producir un conocimiento unificado en relación con un campo de problemas.

Situación abierta:

Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores.

Cabe señalar que esta situación se podría encuadrar dentro del dominio del conocido problema de Apolonio: dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados. Este problema da lugar a 10 casos posibles que llevan a examinar diferentes alternativas respecto a las posiciones relativas de los objetos dados y de la incógnita en relación con esos objetos.

A diferencia de dicho problema, en la situación abierta que presentamos hay dos objetos iniciales cuya posición relativa está dada (dos circunferencias exteriores), por lo que las posibilidades por analizar son las posiciones relativas entre datos e incógnita.

A continuación, se realiza el análisis teórico estructurado en fases, explicitando las heurísticas que pueden utilizarse y los métodos que subyacen o que pueden aplicarse en su resolución. Además, se incluyen algunas preguntas o sugerencias para su tratamiento, con el fin de promover la formulación de problemas en el recorrido por dichas fases.

Comprensión

En esta fase revisamos las nociones implicadas y examinamos las partes principales de la situación abierta (datos, incógnita y condición), desde las cuales podemos formular los problemas asociados a ella.

Este análisis lleva al uso de diferentes heurísticas, tales como la *consideración de casos* particulares o genéricos y el *examen de posibilidades*.[2]

Atendiendo inicialmente a los *datos*: $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$ (con $\overline{o_1o_2} > \overline{R_1R_2}$), surgen naturalmente las dos alternativas respecto a los radios de las circunferencias dadas: *i)* $R_1 = R_2$ (caso particular); *ii)* $R_1 \neq R_2$ (caso genérico).

El análisis de la *incógnita* también lleva a atender diferentes posibilidades respecto a la ubicación del centro de la circunferencia buscada con los centros dados: *a)* centros alineados (caso particular); *b)* centros no alineados (caso genérico).

Al centrar la atención en la *condición*, observamos la relación entre la incógnita y los datos, lo que lleva a considerar cuatro casos posibles respecto a las posiciones relativas de la incógnita con cada una de las circunferencias exteriores dadas:

[2] El examen de posibilidades consiste en descomponer el dominio de objetos a los que se refiere el problema mediante una partición y resolver el problema para cada una de las partes.

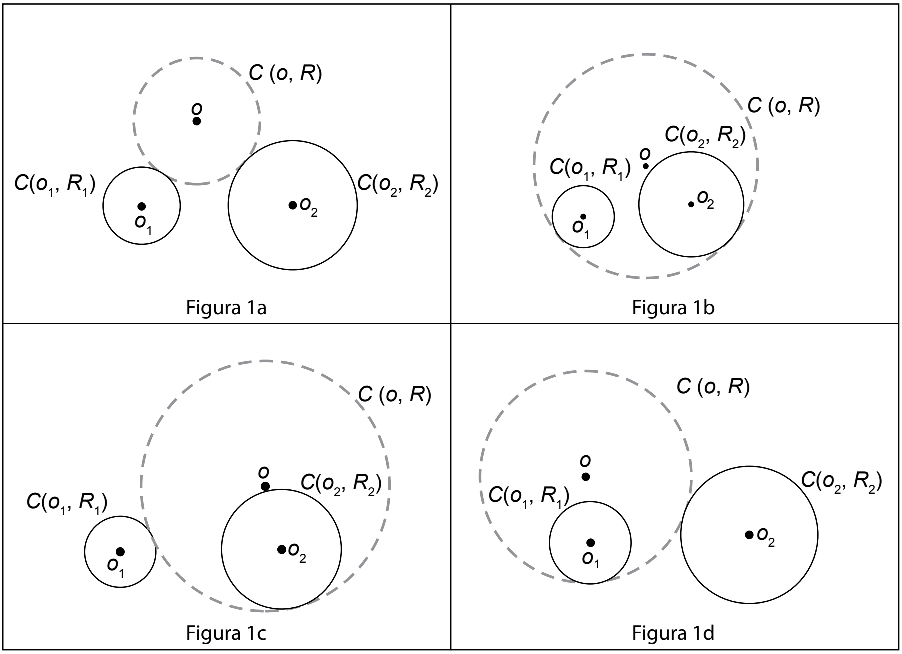


Figura 1

1. La circunferencia es tangente exterior con ambas circunferencias dadas (figura 1a).
2. La circunferencia es tangente interior con ambas circunferencias dadas (figura 1b).
3. La circunferencia es tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ y es tangente interior con $C_2(o_2, R_2)$ (figura 1c).
4. La circunferencia es tangente exterior con $C_2(o_2, R_2)$ y es tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ (figura 1d).

Las consideraciones anteriores llevan a formular una serie de problemas que se generan a partir de las distintas alternativas mencionadas, las cuales sintetizamos en el diagrama de la figura 2, y cerramos esta fase de *comprensión* al identificar el conjunto de problemas asociados a la situación.

1. $C(o, R)$ es tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$
   - a. Centros alineados: $o \in \overline{o_1o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
   - b. Centros no alineados: $o \notin \overline{o_1o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
2. $C(o, R)$ es tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$
   - a. Centros alineados: $o \in \overline{o_1o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
   - b. Centros no alineados: $o \notin \overline{o_1o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
3. $C(o, R)$ es tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ e interior con $C_2(o_2, R_2)$
   - a. Centros alineados: $o \in \overline{o_1o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
   - b. Centros no alineados: $o \notin \overline{o_1o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
4. $C(o, R)$ es tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ e exterior con $C_2(o_2, R_2)$
   - a. Centros alineados: $o \in \overline{o_1o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$
   - b. Centros no alineados: $o \notin \overline{o_1o_2}$
     - $R_1 = R_2$
     - $R_1 \neq R_2$

Figura 2

Elaboración y ejecución del plan

Ambas fases se desdibujan en la situación abierta y estarían vinculadas a cada uno de los problemas incluidos en ella. Abordamos entonces el estudio desde cada problema, considerando los métodos heurísticos que subyacen en su resolución.

Tal como anticipamos al describir los referentes teóricos, en particular vamos a recurrir al *Método de análisis-síntesis* para organizar el recorrido por estas dos fases. En consecuencia, la fase de elaboración estará centrada en el *análisis* y la ejecución, en llevar a cabo la *síntesis*.

En esta presentación, las *figuras de análisis* están hechas en computadora en lugar de a mano alzada para lograr mayor claridad y facilitar la lectura y, además, se deja de lado la *síntesis* que llevaría a hacer efectiva la construcción.

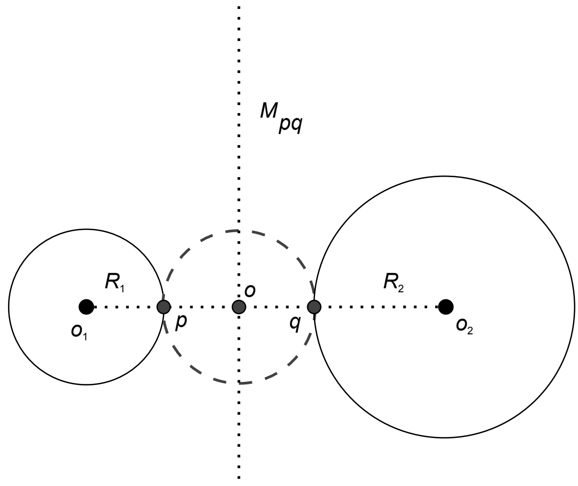


Figura 3. Figura de análisis correspondiente al caso 1 y centros alineados

1. Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$

1.a Centros alineados

Damos el problema por resuelto y dibujamos una figura de análisis, donde P y q son los puntos de tangencia (figura 3).

El problema requiere encontrar el centro de la circunferencia que cumple con las condiciones enunciadas, a partir del cual queda determinado el radio.

La figura 3 nos permite observar, por un lado, que el centro (o) de la circunferencia buscada debe estar en la línea de los centros y, por el otro, que debe equidistar de los puntos de tangencia. Por tanto, el centro se encuentra en dos lugares geométricos específicos: la recta $\overleftrightarrow{o_1o_2}$ y la mediatriz del segmento $\overline{pq}(M_{\overline{pq}})$.

La solución es la circunferencia $C(o,R)$, donde $R = \dfrac{\overline{pq}}{2} = \dfrac{\overline{o_1o_2} - \overline{R_1R_2}}{2}$.

En el caso de ser iguales los radios de las circunferencias iniciales, la mediatriz implicada ($M_{\overline{pq}}$) coincide con la mediatriz del segmento determinado por o_1 y o_2 ($M_{\overline{o_1o_2}}$), donde $R = \dfrac{\overline{o_1o_2} - \overline{R_1R_2}}{2}$.

En la resolución de este problema subyace un método:

Método de los dos lugares

1. Reducir el problema a la construcción de un punto.
2. Dividir la condición en dos partes de modo que cada parte suministre un lugar geométrico para el punto incógnita; cada lugar debe ser circular o rectilíneo.

En el segundo paso del método, se incluye una característica esencial de los lugares geométricos[3] por considerar, estos deben ser circulares o rectilíneos, lo cual es una restricción que resulta previsible en el mundo de la regla y el compás.

El método presentado va más allá de este problema y resulta de gran utilidad en la resolución de una extensa gama de problemas de construcción.

Cabe señalar la potencialidad de la figura de análisis para indagar las relaciones entre datos e incógnita; en particular, permite visualizar tanto el punto incógnita como los lugares geométricos involucrados, con lo cual sólo restaría realizar la construcción.

1.b Centros no alineados

El valor del radio R en la alternativa anterior lleva a anticipar que, para que exista solución, debería cumplirse $R \geq \dfrac{\overline{o_1 o_2} - \overline{R_1 + R_2}}{2}$.

Partimos de la figura de análisis, en la que inicialmente volcamos los datos y dibujamos la incógnita (figura 1a). La observación de esta figura nos lleva a introducir en ella elementos auxiliares tales como el segmento $\overline{o_1 o_2}$ así como los segmentos que unen el centro buscado con los centros dados. Podemos visualizar el triángulo $o_1 \overset{\Delta}{o} o_2$, figura auxiliar que es útil para la resolución. El problema se transforma en construir dicho triángulo y, puesto que contamos con un método, trataremos de utilizarlo. Por tanto, reducimos el problema a la determinación de un punto (o) e intentamos encontrar los lugares geométricos que nos llevan a delimitarlo (figura 4).

[3] Siguiendo a Polya (1962-1965), en este trabajo el término "lugar" significa esencialmente lo mismo que el término "conjunto"; definimos el conjunto (o lugar) enunciando una condición que sus elementos (puntos) deben satisfacer, o una propiedad que estos elementos deben poseer. Cuando no disponemos de información respecto a qué propiedad caracteriza a los elementos de un cierto conjunto (S), diremos que "los elementos del conjunto S tienen la propiedad de pertenecer a S, y satisfacen la condición de que pertenecen a S".

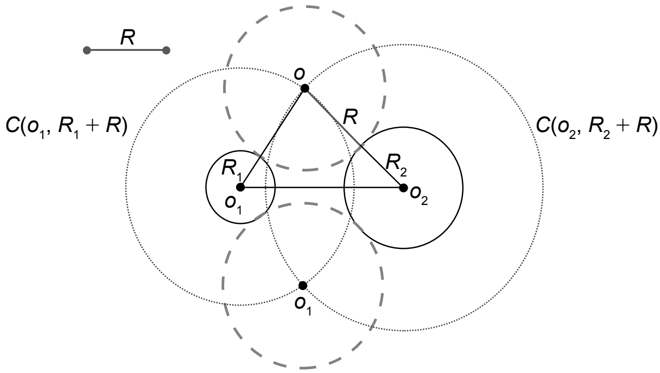


Figura 4. Figura de análisis correspondiente al caso 1 y centros no alineados

Observamos que para un radio arbitrario *R*, la condición requiere:

$$o \in C_1(o_1, R_1 + R) \;\; \wedge \;\; o \in C_2(o_2, R_2 + R)$$

Por tanto, $\{o, o'\} = C_1\,(o_1, R_1 + R) \cap C_2\,(o_2, R_2 + R)$

Con lo cual, para cada valor de R habrá dos soluciones: $C(o,R)$ y $C(o',R)$.

Habiendo culminado el *análisis*, restaría realizar la *síntesis*, con lo cual, al recorrer el camino inverso y partir de los datos, quedaría(n) por construir la(s) circunferencia(s) buscada(s).

En el caso de que las circunferencias dadas fueran congruentes, el triángulo $o_1\overset{\Delta}{o}o_2$ sería isósceles y el centro se hallaría de manera análoga.

Tal como se viene haciendo hasta ahora, continuamos atendiendo las demás alternativas considerando los métodos heurísticos anteriores, utilizando el *análisis-síntesis* para organizar el proceso de resolución y el *método de los dos lugares* como plan para obtener la solución. En cada caso, presentamos el *análisis* y mostramos cómo quedarían plasmados los pasos del *método de los dos lugares*, dejando de lado la *síntesis* o construcción efectiva de la circunferencia buscada.

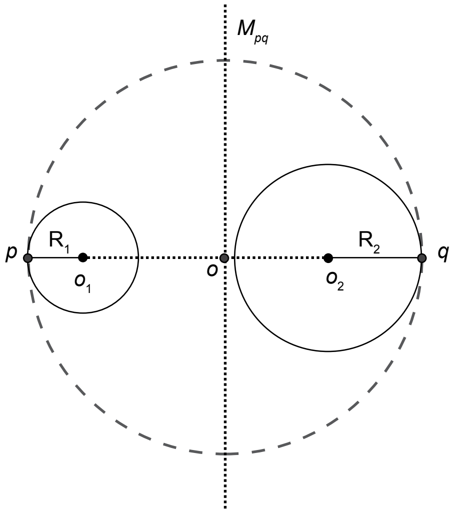


Figura 5. Figura de análisis correspondiente al caso 2 y centros alineados

2. Construir una circunferencia tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ y $C_2(o_2, R_2)$

2.a Centros alineados

Sean p y q puntos de tangencia, $\overline{pq} = \overline{o_1o_2} + \overline{R_1} + \overline{R_2}$ (figura 5).

Condición: $o \in \overline{o_1o_2} \wedge o \in M_{\overline{pq}}$

$$\therefore \{o\} = \overline{o_1o_2} \cap M_{\overline{pq}}$$

La solución es la circunferencia $C(o,R)$, donde $R = \dfrac{\overline{o_1o_2} + \overline{R_1 + R_2}}{2}$.

2.b Centros no alineados

Puede observarse que, para que exista solución, debería cumplirse $R \geq \dfrac{\overline{o_1o_2} + \overline{R_1 + R_2}}{2}$ (figura 6).

Condición para un R arbitrario: $o \in C_1(o_1, R_1 - R) \wedge o \in C_2(o_2, R - R_2)$

$$\therefore \{o,o'\} = C_1(o_1, R - R_1) \cap C_2(o_2, R - R_2)$$

Para cada valor de R, habrá dos soluciones: $C(o,R)$ y $C(o',R)$.

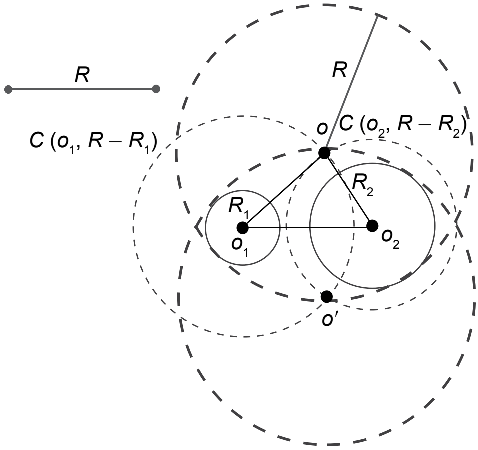


Figura 6. Figura de análisis correspondiente al caso 2 y centros no alineados

3. Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(o_1, R_1)$ y tangente interior con $C_2(o_2, R_2)$

3.a Centros alineados

Sean p y q puntos de tangencia (figura 7).

Condición: $o \in (\overline{o_1o_2}) \wedge o \in M_{\overline{pq}}$

$$\therefore \ \{o\} = \overline{o_1o_2} \cap M_{\overline{pq}}$$

La solución es la circunferencia $C(o,R)$ donde $R = \dfrac{\overline{o_1o_2} + R_2 - R_1}{2}$.

3.b Centros no alineados

Puede observarse que, para que exista solución en este caso, debería cumplirse $R \geq \dfrac{o_1o_2 + R_2 + R_1}{2}$ (figura 8).

Condición para un R arbitrario: $o \in C_1(o_1, R + R_1) \wedge o \in C_2(o_2, R - R_2)$

$$\therefore \ \{o, o'\} = C_1(o_1, R + R_1) \cap C_2(o_2, R - R_2)$$

Para cada valor de R, habrá dos soluciones: $C(o,R)$ y $C(o',R)$.

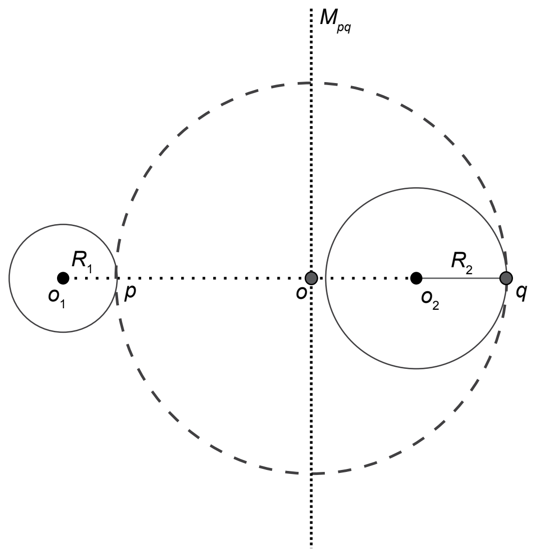


Figura 7. Figura de análisis correspondiente al caso 3 y centros alineados

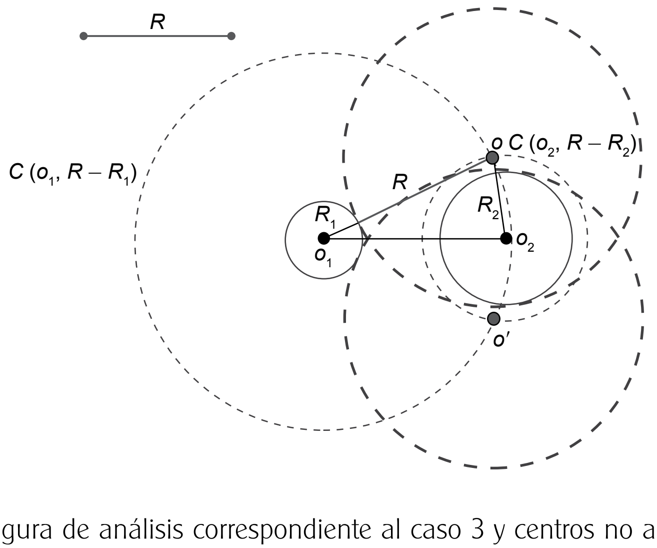


Figura 8. Figura de análisis correspondiente al caso 3 y centros no alineados

4. Construir una circunferencia tangente interior con $C_1(o_1, R_1)$ y tangente exterior con $C_2(o_2, R_2)$

Este caso es similar al anterior, la figura de análisis nos permitiría observar que, en el caso de centros alineados, estarían involucrados los mismos lugares geométricos que en 3.a para hallar el centro buscado. Y en el caso de centros no alineados, o y o' se hallarían en la intersección de las circunferencias $C_1(o_1, R - R_1)$ y $C_2(o_2, R + R_2)$.

A diferencia de las fases de elaboración y ejecución, en las que hemos puesto el acento en los métodos, ahora desviaremos la atención al estudio de las soluciones halladas y al planteamiento de nuevos problemas.

Visión retrospectiva

Esta fase consta de una mirada hacia atrás y otra hacia adelante, de revisión y extensión. Para organizarla, consideramos los aportes teóricos ya mencionados para promover instancias de planteamiento de problemas. Por un lado, la revisión está marcada por una vuelta hacia atrás en la que se formulan preguntas generales que llevan a considerar todos los problemas en conjunto y plantear nuevos interrogantes a partir del examen de la solución. Por otro lado, la extensión consiste en mirar hacia adelante y examinar problemas que pueden generarse a partir de cambiar los datos, la incógnita o la condición y el efecto que tiene hacerlo, buscando argumentos para explicar lo que ocurre.

1. Revisión

En los distintos problemas asociados a la situación abierta y con el propósito de promover nuevos cuestionamientos y exploraciones, cabe hacerse preguntas generales para la elaboración de conjeturas y su validación, tales como: ¿Qué características tienen las soluciones en cada caso? ¿Cómo variará la ubicación del centro cuando varía R? ¿Qué caracteriza al conjunto de puntos formado por dichos centros? ¿Hay alguna relación entre las soluciones halladas en los distintos casos?

Comenzando con el caso 1, donde la circunferencia buscada es tangente exterior a las dadas y atendiendo al caso particular $R_1 = R_2$, podemos observar

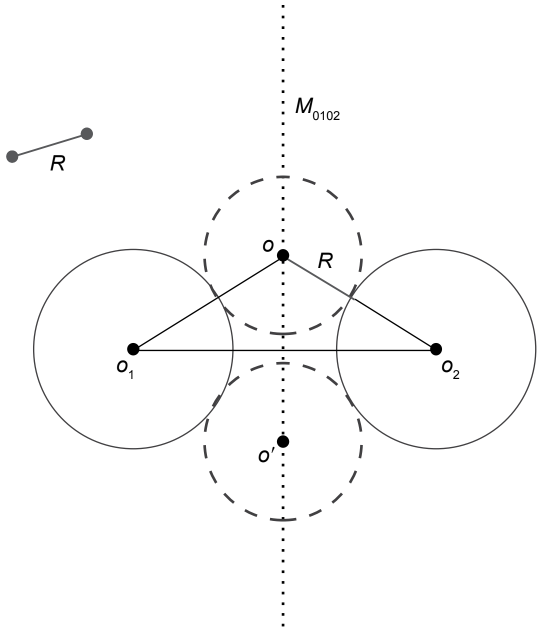


Figura 9. Figura de análisis correspondiente al caso 1, centros no alineados y radios iguales

en la figura de análisis (figura 9) que el triángulo $o_1\overset{\Delta}{o}o_2$ es isósceles, donde o es el vértice opuesto a la base $\overline{o_1o_2}$ y que, al variar R, los centros de las circunferencias buscadas están en la mediatriz del segmento $\overline{o_1o_2}$.

Para el caso genérico $R_1 \neq R_2$, las respuestas no son inmediatas, ya que ni la figura de análisis ni la propia construcción con instrumentos de geometría nos dan algún indicio para caracterizar al conjunto de puntos formado por los centros. Por esta razón, introducimos el recurso tecnológico para facilitar la elaboración de conjeturas y la exploración de las características de las posibles soluciones. Hay diferentes softwares de geometría dinámica tales como Cabri, SketchPad, Geogebra, entre otros, que pueden utilizarse con este propósito.

Atendiendo al análisis ya presentado correspondiente a este caso (figura 4), realizamos la síntesis valiéndonos de Geogebra y, al hacer esta construcción, quedan determinados los dos centros de las circunferencias buscadas para un radio arbitrario R.

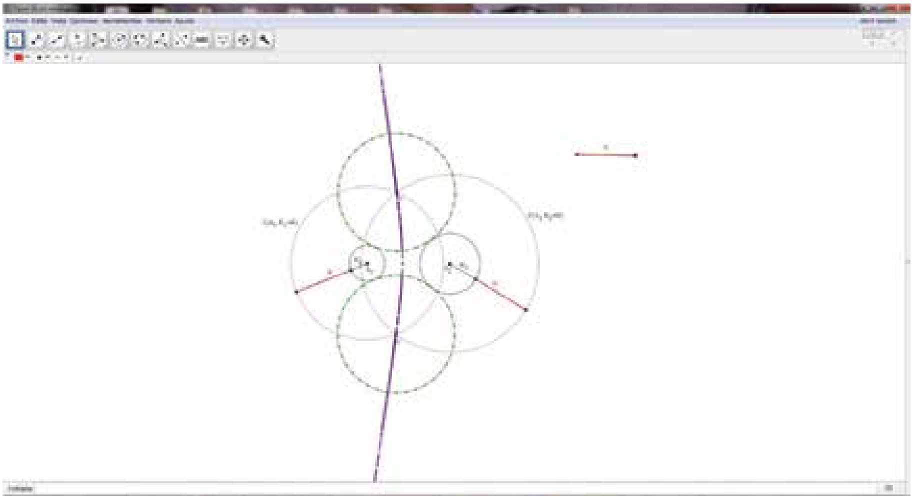


Figura 10. Construcción con Geogebra correspondiente al caso 1

El programa permite visualizar los posibles centros al variar el valor de R, y una de las maneras de hacerlo es activando la herramienta "rastro" sobre los puntos o y o' (figura 10).

La observación de una curva en pantalla, correspondiente a la ubicación de los centros, nos lleva a realizar diversas conjeturas respecto a la identificación del lugar geométrico involucrado. Podemos seguir explorando en la búsqueda de nuevas pistas, modificar los radios de las circunferencias dadas y evaluar los efectos que provocan tales cambios en dicha curva, y luego llegar a dilucidar que esta correspondería a la rama de una hipérbola.

Este hallazgo se traduce en una nueva reformulación de la tarea, que consiste en caracterizar a este lugar geométrico, realizando la validación correspondiente. Por tanto, el próximo paso será la determinación de los focos y del segmento diferencia de la cónica en cuestión. En esta dirección, podemos pensar en asociar los centros de las circunferencias dadas, o_1 y o_2, con los focos de la supuesta hipérbola. Ahora el problema radica en probar que la diferencia de las distancias de o y o' a cada uno de los centros dados es constante:

$$\overline{oo_1} = \overline{R_1 + R}$$
$$\overline{oo_2} = \overline{R_2 + R}$$
$$\overline{oo_2} - \overline{oo_1} = \overline{R_2 + R} - \overline{R_1 + R} = \overline{R_2 - R_1} = k \text{ (constante)}$$

Análogas relaciones se cumplen con o', por tanto, el lugar geométrico del centro de la circunferencia buscada cuando varía R es una rama de hipérbola de focos o_1 y o_2 y segmento diferencia $\overline{R_2 - R_1}$, con lo cual se valida la conjetura.

Si consideramos el caso 2, donde la circunferencia buscada es tangente interior a las dadas y recurrimos nuevamente a Geogebra, observamos que, al variar el radio R, también los centros se encuentran en una rama de hipérbola. Al hacer la validación, se puede constatar que el lugar geométrico implicado es la otra rama de hipérbola correspondiente al primer caso.

$$\overline{oo_1} = \overline{R - R_1}$$
$$\overline{oo_2} = \overline{R - R_2}$$
$$\overline{oo_1} - \overline{oo_2} = \overline{R - R_1} - \overline{R - R_2} = \overline{R_2 - R_1} = k \text{ (constante)}$$

Asimismo, si los radios de las circunferencias iniciales son iguales, los centros de las circunferencias pertenecen a la mediatriz de $\overline{o_1 o_2}$.

De manera similar, si hacemos la construcción en Geogebra para los casos restantes, donde la circunferencia buscada es tangente interior a una de las dadas y exterior a la otra, se puede concluir que los centros de las circunferencias pertenecen a una hipérbola cuyo segmento diferencia es $\overline{R_2 + R_1}$ (figura 11).

En síntesis, el lugar geométrico de los centros involucrados en la situación abierta corresponde a ramas de hipérbolas cuyo segmento característico es la suma o diferencia de los radios de las circunferencias dadas. En particular, si las circunferencias iniciales son congruentes, en los dos primeros casos dicho lugar pasa a ser una recta: la mediatriz del segmento determinado por los centros dados.

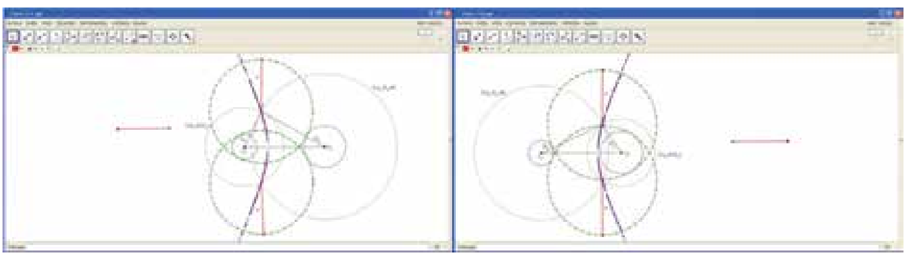


Figura 11. Construcciones en Geogebra de los casos 3 y 4

2. Extensión

Con el propósito de seguir generando nuevos problemas a partir de esta situación abierta, exploramos posibles cambios en sus partes principales a través de la pregunta ¿qué pasaría si...? El planteo de esta cuestión de manera sistemática nos lleva a examinar el efecto de hacer modificaciones en los datos, las condiciones o la incógnita y producir explicaciones en tal sentido. Como ya hemos mencionado, los problemas de Apolonio son una fuente importante de problemas abiertos vinculados a la situación presentada, los cuales también podrían considerarse al realizar su extensión.

A continuación, presentamos algunos ejemplos de enunciados que resultan de modificar las partes principales de la situación abierta, dentro de los cuales quedan incluidos algunos de los contemplados por Apolonio.

a) ¿Qué sucedería si cambiamos los *datos*?
P_1: *Trazar una circunferencia tangente a una recta* A *y a una circunferencia* C(o,R) *en un punto* p *de esta (alternativas asociadas al problema 8 de Apolonio).*[4]
P_2: *Construir una circunferencia tangente a tres circunferencias exteriores (problema 10 de Apolonio).*

b) ¿Qué pasaría si cambiamos la *incógnita*?
P_3: *Construir una recta tangente a dos circunferencias exteriores.*
P_4: *Dadas dos circunferencias exteriores, construir un trapecio circunscripto a una de ellas donde uno de sus lados es tangente a la otra.*

c) ¿Y si cambiamos la *condición*?
P_5: *Dadas dos circunferencias exteriores, construir una circunferencia tangente a una de ellas y cuya área duplique al área de la otra.*
P_6: *Dadas dos circunferencias exteriores, construir una circunferencia homotética a ellas y de radio* R.

A MODO DE CIERRE

La situación abierta propuesta nos ha permitido poner de manifiesto dos métodos que pueden emplearse para resolver una variedad de problemas de cons-

[4] Problema 8 de Apolonio: trazar una circunferencia que pasa por un punto y es tangente a una recta y a una circunferencia.

trucción, así como también diferentes estrategias que pueden surgir a través de un proceso de exploración, tales como considerar casos particulares, generalizar, examinar distintas posibilidades, conjeturar y validar, entre otras.

La consideración de las fases como medio de organización del proceso de resolución y el acento puesto en el planteamiento de problemas constituyen los otros dos pilares sobre los que realizamos el estudio que aquí se informa. Los señalamientos e interpelaciones que lo conforman responden al propósito de construir ambientes de aprendizaje que estimulen la producción de conjeturas y su validación, la generación de nuevos problemas a partir de uno inicial y la integración de distintos contenidos escolares.

Surgen naturalmente algunas implicaciones para la práctica docente que atañen a los elementos que habría que atender al organizar la enseñanza de resolución de problemas a partir de las construcciones geométricas, movilizando el razonamiento argumentativo desde el conocimiento de las figuras.

Esperamos poder aportar una perspectiva de trabajo que lleve a conceptualizar los problemas como oportunidades para extender o formular nuevos problemas y poner en juego tareas propias del quehacer matemático, específicamente aquellas de carácter heurístico, para resignificar los contenidos geométricos de acuerdo con los actuales enfoques disciplinares y didácticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Brown, S. I. y M. I. Walter (1983), *The art of problem posing*, Filadelphia, The Franklin Institute Press.

Butts T. (1980), "Posing Problems Properly", en S. Krulik y R. Reys (eds.) (1980), *Problem Solving in School Mathematics*, Reston, VA, NCTM, pp. 23-33.

Euclides (1991), *Elementos*, Madrid, Gredos.

Polya, G. (1962-1965), *Mathematical Discovery*, 2 vols., Nueva York, John Wiley and Sons.

——— (1965), *Cómo plantear y resolver problemas*, México, Trillas. [Versión original (1945), *How to solve it*, Princeton, NJ, Princeton University Press].

Siñeriz, L. (2000), *Enseñanza de resolución de problemas de regla y compás del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos*, Tesis doctoral, Universitat de València. Disponible en: http://roderic.uv.es//handle/10550/37998

Siñeriz, L. y M. Quijano (2014), "El problema de las circunferencias tangentes.

Análisis de producciones de estudiantes de profesorado", en G. Astudillo, P. Willging y N. Ferreyra (eds.), *Memorias de la V Reunión Pampeana de Educación Matemática*, Santa Rosa, La Pampa, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, pp. 90-99.

Skovsmose, O. (2000), "Escenarios de investigación", *Revista Ema*, vol. 6, núm. 1, pp. 3-26.

DATOS DE LAS AUTORAS

Liliana Siñeriz
Centro Regional Universitario Bariloche-Universidad Nacional del Comahue,
Río Negro, Argentina
lsineriz@gmail.com

Trinidad Quijano
Centro Regional Universitario Bariloche-Universidad Nacional del Comahue,
Río Negro, Argentina
trinidadquijano@gmail.com

Probabilidad en el camino de una hormiga: una propuesta de enseñanza con uso de metáforas

Gamaliel Cerda-Morales

Resumen: Basado en la teoría de Lakoff y Núñez (2000) sobre "¿De dónde vienen las matemáticas?", este trabajo muestra algunas reflexiones sobre los fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el aprendizaje de las matemáticas. En particular, se propone un ejemplo concreto de modelización matemática que permite explicar cómo puede sustentarse la construcción del concepto "probabilidad" mediante el uso de metáforas que existen en el discurso del profesor.

Palabras clave: educación, matemáticas, metáforas, ciencias cognitivas, modelización.

Probability in the way of an ant: a proposal for teaching use of metaphors
Abstract: Based on the theory of Lakoff and Núnez (2000) on "Where mathematics comes from?", this work shows some reflections on the phenomena related to the use of metaphors in the learning of mathematics. In particular, we propose a concrete example of mathematical modelling to explain how the construction of the term "probability" may be supported by the use of metaphors that exist in the teacher's speech.

Keywords: education, mathematics, metaphors, cognitive sciences, modelling.

INTRODUCCIÓN

La teoría sobre "¿De dónde vienen las matemáticas?", propuesta por Lakoff y Núñez (2000), hace énfasis en el estudio de los procesos cognitivos que ponen en juego quienes aprenden las matemáticas. La principal tesis que construyen los

Fecha de recepción: 14 de octubre de 2013; fecha de aceptación: 2 de noviembre de 2015.

autores afirma que el origen de las estructuras matemáticas que construyen las personas, y también las que se construyen en instituciones, se encuentran en los procesos cognitivos cotidianos como son la percepción, la memoria y el pensamiento metafórico. Según estos autores, dichos procesos permiten explicar cómo la construcción de los objetos matemáticos está sostenida por la forma en que se relacionan el cuerpo humano y los objetos de la vida cotidiana.

Desde lo abstracto, las metáforas se caracterizan por construir un puente conceptual entre un dominio de partida y un dominio de llegada que permite proyectar propiedades del dominio de partida en el de llegada. Soto-Andrade (2006) pone énfasis en el tránsito del modo cognitivo verbal-secuencial, dominante en la enseñanza de la matemática, a otros modos cognitivos menos habituales, eventualmente no verbales y no secuenciales, que deben ser en medida estimulados en el aprendizaje actual de las matemáticas. Se propondrá un ejemplo en este trabajo con el fin de evidenciar que las metáforas crean una cierta conexión que permite que se trasladen una serie de características y estructuras desde un dominio concreto a otro más abstracto. Ahora bien, las metáforas sólo dejan ver un aspecto del dominio de llegada que de ninguna manera constituye su totalidad; en este sentido, nos sirven para mostrar el aspecto que deseamos evidenciar y ocultar otros, de los cuales muchas veces ni siquiera somos conscientes. Entre sus funciones, la metáfora permite conectar diferentes sentidos y ampliar el significado que tiene para una persona un determinado objeto, en nuestro caso, un objeto matemático.

Primero, asumimos la interpretación de la metáfora como la comprensión de un dominio en términos de otro y proponemos un ejemplo concreto de modelización que permite conocer la naturaleza del concepto probabilidad y abordar su enseñanza en la educación secundaria (16-17 años) mediante el uso de metáforas en el discurso del profesor.

Metáforas conceptuales

Nuestra representación concreta del mundo está siempre influida por las metáforas que inyectamos en él, casi siempre de una manera inconsciente (Acevedo, 2005). La mayor parte de los seres humanos conceptualizamos cosas abstractas en términos de cosas concretas. Una posible explicación de estas metáforas, llamadas metáforas conceptuales, es que se sustentan en las experiencias que vive nuestro cuerpo para relacionarse con su entorno físico y cultural. En este sentido, Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas que se observan comúnmente en matemáticas y cuyo dominio de llegada podría estar dentro o fuera de ellas.

- Las **metáforas de anclaje** (*grounding metaphores*) son las que tienen su dominio de partida dentro de las matemáticas, pero su dominio de llegada fuera de ellas. Por ejemplo: "las clases son contenedores", "los puntos son objetos", etcétera.
- Las **metáforas de vinculación** (*linking metaphores*) tienen su dominio de partida y de llegada en las mismas matemáticas. Por ejemplo: "los números reales son puntos de una recta", "las funciones de proporcionalidad directa son rectas que pasan por el origen del plano", etcétera.

La importancia que tiene el pensamiento metafórico en la construcción del significado de los objetos matemáticos es reconocida en didáctica de las matemáticas y es el origen de una teoría sobre las matemáticas propuesta por Lakoff y Núñez (2000). Según este punto de vista, el aprendizaje de las matemáticas se ubica en las ideas de las personas, no en las demostraciones formales, axiomas y definiciones. Es común en la enseñanza tradicional de las matemáticas evaluar métodos, algoritmos y aplicación de fórmulas simples y complejas; sin embargo, mientras más aprendemos del origen de las matemáticas, más entendemos que su enseñanza debe advertirse desde el aspecto cognitivo del sujeto que las aprende (Sfard, 1997; Varela, Thompson y Rosch, 1998), y aquí, las metáforas que tienen mayor impacto cognitivo involucran un cambio significativo en el modo de pensar del estudiante.

Durante la última década se ha tomado progresivamente conciencia del hecho de que las metáforas no son sólo artefactos retóricos, sino potentes herramientas cognitivas que nos ayudan a construir y aprender nuevos conceptos matemáticos, así como a resolver problemas de manera eficaz y amigable para el estudiante (Acevedo, 2005; Araya, 2000; Dubinsky, 1999; Duval, 1995; Johnson y Lakoff, 2003; Lakoff y Núñez, 2000).

Se reconoce la existencia de metáforas conceptuales que son transformaciones o "mapeos" de un dominio "fuente" a un dominio "objetivo" que transportan las características deducidas del primero en las del segundo y nos permiten entender el segundo, por lo general más abstracto y opaco, en términos del primero, más "aterrizado" y transparente. Por lo demás, el término "metáfora" se utiliza actualmente en un sentido cada vez más laxo como sinónimo de "representación" y "analogía" (Palmquist, 2001). En este sentido, la "representación" traslada características de un dominio más abstracto a uno más transparente, y una "analogía" lo hace entre dominios iguales.

PROPUESTA DE METÁFORAS EN LA ENSEÑANZA DE PROBABILIDADES

La probabilidad es esencial para preparar a los estudiantes, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (Bennet, 1998). Por otro lado, la cultura en probabilidad (Gal, 2005) requiere no sólo conocimientos, sino actitudes que lleven a los estudiantes a interesarse por mejorar su conocimiento, incluso finalizado su aprendizaje en la escuela o universidad. Si bien la enseñanza de las probabilidades tiene por objetivo lograr que el estudiante sea capaz de obtener la frecuencia de algún suceso determinado mediante la realización de un experimento aleatorio del que se conocen todos los resultados posibles y bajo condiciones suficientemente estables, muchas veces no se cuenta con todas las herramientas para predecir la ocurrencia de cierto suceso en el futuro.

Este trabajo presenta un ejemplo concreto en la enseñanza del concepto "probabilidad" que permite evidenciar cómo un enunciado, que resulta *a priori* complejo y abstracto para estudiantes de secundaria (16-17 años), puede visualizarse de manera más "sencilla" y transparente mediante el uso de metáforas en el discurso del profesor. Y más aún, cómo podemos advertir a través de ellas características mucho más familiares para el estudiante que lo incentiven a resolver la problemática.

Ejemplo

Una hormiga se pasea alegremente por un tetraedro de alambre, eligiendo, cada vez que llega a un vértice, cualquiera de las tres aristas a las que está conectado, con igual probabilidad. Además siempre recorre cada arista "de un tirón", sin detenerse o cambiar de dirección a mitad de camino.

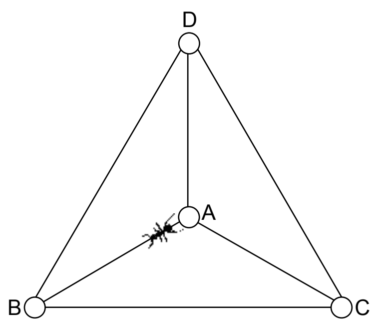


Figura 1. La hormiga en los vértices del tetraedro regular

Si la hormiga se encuentra inicialmente en el vértice A del tetraedro (como indica la figura 1), ¿dónde estará después de recorrer una arista, dos aristas, tres aristas? ¿Dónde estará después de recorrer m aristas? ¿Dónde estará al cabo de recorrer muchísimas aristas? ¿A qué vértice(s) conviene más apostar con el tiempo?

Por otro lado, podemos representar el mencionado paseo al azar, por una repartición iterada de fluido; por ejemplo, jugo de naranja entre cuatro amigos, que comienza cuando uno de ellos reparte un litro de jugo a los otros tres que no tienen nada, y luego cada uno de ellos hace lo mismo con los otros tres, y así sucesivamente. Esto es, si ya entendemos en alguna medida lo que es un paseo al azar. Pero si estamos recién descubriéndolo o construyéndolo, diríamos que la repartición de jugo es una metáfora del paseo al azar de la hormiga. De esta manera, podemos determinar de manera cuantitativa la presencia de la hormiga en los vértices del tetraedro, un juego abstracto si no se recurre a las metáforas. No olvidemos que no se trata de una metáfora de la metáfora, sino de lograr una "analogía" en el dominio de partida que nos permita descubrir más características en la propuesta diseñada.

Soto-Andrade (2007) se refiere a las metáforas de los paseos al azar para un polígono regular (específicamente un triángulo equilátero). Utilizando la notación de este autor, este trabajo generaliza los paseos o caminatas a un poliedro regular en tres dimensiones, evidenciando ciertas variantes que, desde el discurso del profesor, podrían mejorar la enseñanza-aprendizaje del concepto probabilidad. A continuación, los abordajes metafóricos de nuestra problemática:

La *metáfora salomónica* ve a la hormiga partida en tres porciones en el primer paso, donde cada tercio de hormiga aterriza en uno de los tres vecinos inmediatos, y así en cada paso de manera sucesiva. Van apareciendo así pedacitos de hormiga en cada vértice del tetraedro, que podemos ir añadiendo fácilmente paso a paso, para calcular la porción de hormiga presente en cada vértice después de *m* caminatas. Nótese que esta metáfora facilita el descubrimiento de la analogía entre el paseo de la hormiga y la evolución de un mercado de consumidores (en iguales condiciones) disputado por cuatro productores. En este caso, la probabilidad de encontrar a la hormiga en cierto vértice resulta ser la parte del mercado controlada por un productor.

La *metáfora hidráulica* ve el cálculo de las probabilidades en cuestión como el flujo o escurrimiento de un litro de fluido probabilista por una red de mangueras, con repartición equitativa en cada bifurcación. Así, la repartición de un litro de jugo de naranja entre cuatro personas no se trata de una metáfora de los paseos al azar, sino más bien de una representación concreta de éste.

La *metáfora frecuentista* ve un enjambre de hormigas que parte del vértice dado y se divide en tres partes iguales entre los tres vecinos, cada vez. Si se considera $m = 8$, por ejemplo, astutamente soltamos $3^8 = 6\,561$ hormigas, que se irán repartiendo por tercios en los vértices del tetraedro. Basta ir registrando la cantidad de hormigas que van llegando a cada vértice hasta la octava bifurcación. El porcentaje de hormigas que llegó a cada vértice da entonces la probabilidad de presencia de la hormiga aleatoria original en ese vértice, al cabo de la octava caminata.

Finalmente, en la *metáfora platónica*, que es cuando se lanza una moneda de tres caras (si existiese una), donde cada cara cae una vez con igual probabilidad, la hormiga tira una moneda de tres caras para elegir el camino que tomará en el tetraedro. Así, las probabilidades se asignan o calculan como frecuencias relativas de una estadística platónica.

UNA SOLUCIÓN METAFÓRICA AL PROBLEMA

La probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice A del tetraedro regular, denotada por P(A), se observa en el cuadro 1 para las primeras cinco caminatas de la hormiga.

Utilizando la metáfora salomónica, podemos asegurar que la evolución del mercado tiende a equipararse y, por tanto, los cuatro productores obtienen la misma ganancia. En el caso de la hormiga y verificando los valores del cuadro 1, su presencia en los vértices del tetraedro tiende a equipararse igualando el valor 0.25. En breve, se requiere un argumento matemático para verificar dicha

Cuadro 1. Probabilidades en la metáfora platónica

Caminata	P(A)	P(B)	P(C)	P(D)
0	1/1	0/1	0/1	0/1
1	0/3	1/3	1/3	1/3
2	3/9	2/9	2/9	2/9
3	6/27	7/27	7/27	7/27
4	21/81	20/81	20/81	20/81
5	60/243	61/243	61/243	61/243
...	...	...	...	...

Tabla 2. Probabilidades de estar en el vértice B

Caminata	0	1	2	3	4	5
P(B)	0	1/3	2/9	7/27	20/81	61/243

afirmación, la cual resulta ser mucho más abstracta para el estudiante que aún no conoce conceptos como "sucesión numérica" o "límite".

Entre aquellas deducciones que el alumno podría advertir del cuadro 1, está la suma de las probabilidades de presencia en los vértices igual a 1, que podría llamarse "ley de conservación de la hormiga", nada se origina ni se destruye, todo se transforma. Más concreto aún, la presencia de la hormiga en el vértice B está dada en el cuadro 2.

De donde se observa que el denominador es potencia de 3, y el numerador, un término de la sucesión numérica (0, 1, 2, 7, 20, 61...). La tarea matemática será tratar de definir una recurrencia en la sucesión anterior, algo que a priori resulta inalcanzable para el nivel en el que se ha diseñado la propuesta. Pero, ¿qué tan complejo puede ser, si se advierte una relación lineal entre las P(B), a medida que aumenta la caminata de la hormiga?

Si denotamos $P_m(A) = a_m/3^m$ y $P_m(B) = b_m/3^m$. la probabilidad en la caminata m-ésima de la hormiga, por ley de conservación, tenemos $P_m(A) + 3P_m(B) = 1$, pues la probabilidad de encontrar a la hormiga en los vértices B, C y D es la misma. En particular, $a_m + 3b_m = 3^m$. Además, desde el cuadro 1, se tiene $a_m - b_m = (-1)^m$. Al resolver el sistema de ecuaciones con dos incógnitas, la sucesión b_{m} es $(3^m - (-1)^m)/4$, para todo número natural m y la probabilidad de estar en el vértice B es $P_m(B) = (1-(-1/3)^m)/4$ y, por tanto, $P(C) = P(D) = (1-(-1/3)^m)/4$. Al usar la ley de conservación, la probabilidad de encontrar a la hormiga en el vértice A es $P_m(A) = (1 + 3(-1/3)^m)/4$.

Como hemos advertido, el alumno podría resolver el problema haciendo uso de los sistemas de ecuaciones lineales. Sin embargo, aún no es claro cómo podría advertir las variables que están en juego desde el cuadro 1. Allí el profesor juega un papel importante, pero nuestro objetivo es explicar el problema de manera que los alumnos recurran a las metáforas y obtengan desde allí datos más sencillos con los cuales poder resolverlo.

Para Lakoff y Núñez, el uso de metáforas es fundamental en la comprensión de cualquier tema y, por tanto, en su explicación. Ahora bien, también puede haber causas relacionadas con las matemáticas, ya que el cálculo de probabilidades necesita, además de una descripción en términos globales, la introducción de conceptos locales, como la distribución muestral, que simplificaría el estudio azaroso de la hormiga. Estos conceptos locales presentan una gran dificultad para los alumnos, motivo por el cual, a mi entender, hay profesores que los dejan en un segundo plano y prefieren utilizar una tabla de datos que muchas veces resulta ser un recurso fructífero en el salón de clases.

Nótese que, para enseñar un contenido abstracto, es importante el uso de material concreto, y aquí desempeñan un papel fundamental las metáforas. Según Johnson y Lakoff (2003), los estudiantes que han suprimido parte de su infancia tendrán mayor dificultad para aprender los conceptos abstractos; y en este camino, las metáforas no tendrán un suelo fértil para florecer.

Batanero (2000) establece que el acercamiento del alumno hacia la construcción del significado de la probabilidad en el aula debe considerar la simulación manipulable con lápiz y papel para muestras pequeñas. Este juicio permite verificar si existe un terreno fértil para que la metáfora probabilística pueda florecer en el estudiante. En nuestro caso, este efecto proporciona más que una herramienta, un terreno infértil si el profesor no es capaz de suministrar los recursos útiles para desarrollar los contenidos que el alumno debe adquirir. Por ejemplo, si el objetivo es que el alumno aprenda sobre sistemas de ecuaciones lineales, la probabilidad como concepto resulta innecesaria sin el uso de metáforas. Mientras más asimila las analogías del paseo, mejor es su aprendizaje de la evolución de la caminata azarosa de la hormiga.

Si el profesor plantea en su discurso un tipo de metáfora salomónica o hidráulica, podría inducir al alumno a entender la probabilidad como una parte de la hormiga determinada sobre los vértices en el camino que recorre o parte de un fluido que transita por una red de mangueras. Palabras como "la hormiga se particiona", "el líquido se reparte de manera equitativa" pueden producir este efecto en el alumno. Para Lakoff y Núñez (2000, p. 38) esta es una poderosa metáfora utilizada muy a menudo por los profesores en todos los niveles de enseñanza. En dicha metáfora se sugiere una organización espacio-temporal, se tiene un origen ("de"), un camino ("pasa por", "aquí", "en su caminata"), y un fin ("a", "hasta", "dónde estará") y además se contempla algo que se mueve y que se puede localizar en un momento dado (los vértices en el camino).

EL PAPEL DE LA METÁFORA EN LA NEGOCIACIÓN DE SIGNIFICADOS

En su discurso, el profesor tiene por objetivo recordar el concepto "punto de partida" y los posibles caminos por seguir desde ese punto de partida. En el paseo al azar, el profesor propone un primer ejemplo breve con el uso de una moneda; en este sentido, el profesor introduce la formulación: la probabilidad de obtener cara o sello es la misma. Esta formulación resulta más operativa para el cálculo de una probabilidad, ya que facilita entrar en un "juego de lenguaje" que permite llegar a un consenso sobre cuáles son las reglas del juego. Un caso especial resulta si ya no tenemos una moneda y el dominio de aplicación se incrementa en tres posibles opciones.

A continuación, algunas indicaciones que podrían orientar el discurso del docente al tratar esta problemática en el aula, con ella se pone en juego el siguiente lenguaje:

- *Introducción de un elemento genérico*. El profesor introduce el elemento genérico *hormiga* sobre la cual se realizarán las operaciones indicadas en la formulación del enunciado, mediante la frase "camina a cualquiera de las tres aristas a las que está conectada con igual probabilidad" (señalando los caminos desde el vértice A del tetraedro con el dedo), y después dice "¿qué ocurre en la primera caminata?" y espera que los alumnos mentalmente encuentren los valores para los cuales se pueden realizar las operaciones indicadas en la formulación del enunciado.

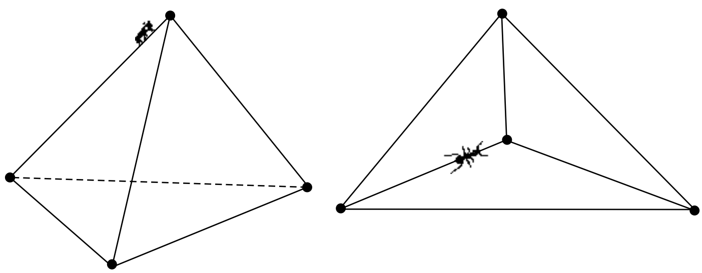


Figura 2. La hormiga en el tetraedro regular

- *Consenso sobre el rango de valores del elemento genérico*. Los alumnos podrían formular hipótesis sobre el dominio hasta llegar a un

> consenso que es aceptado por todos y, sobre todo, por el profesor. En este caso, los alumnos podrían decir que "todos tienen probabilidad 1/3 menos el vértice A que tiene probabilidad 0" y el profesor da por buena esta afirmación.

En la segunda parte, el profesor puede reproducir el mismo juego de lenguaje con algunas variantes. La primera variante es que, en este caso, el elemento genérico está en un punto de partida distinto. En efecto, en este caso el profesor escribe 1/3 en cada vértice, salvo en A, donde escribe 0, y espera que los alumnos mentalmente apliquen la técnica de: *1)* pensar en nuevos puntos de partida, *2)* graficar los resultados en un cuadro según la caminata observada, *3)* observar que en el cuadro hay datos que se repiten y deben omitirse (la probabilidad de estar en los vértices B, C y D es la misma), y *4)* que este razonamiento es válido para cualquier punto de partida. La segunda variante es que, cuando los alumnos responden "parece que tiene mayor probabilidad de estar en A", el profesor considera ambigua esta respuesta para llegar a un consenso y decide intervenir pidiendo a los alumnos que centren su atención en los demás vértices, omitiendo cierta afirmación a priori desde el vértice A.

Es importante remarcar que el consenso al que se llega podría estar expresado en términos metafóricos, donde los alumnos y el profesor utilizan la expresión "tres vértices tienen igual probabilidad", los alumnos lo hacen oralmente, mientras que el profesor, a esta expresión oral, asocia la representación del cuadro originado del enunciado y también la gesticulación sobre la parte externa de la figura 1, moviendo la mano desde el origen a los demás vértices; con ello hace corporal un conocimiento previo, las otras tres opciones son iguales. Así, el movimiento de las manos en el profesor podría dar a entender una respuesta errada por parte del alumno; es decir, el vértice A tiene menos probabilidad de albergar a la hormiga, ya que me "trasladé" desde A. Por ejemplo, Marghetis y Núñez (2013) estudian el movimiento ficticio (o *fictive motion*) presente en la enseñanza del concepto "continuidad" en matemáticas, poniendo énfasis en las consecuencias que puede traer el acto corporal en el actuar de quien lo enseña.

La combinación del lenguaje dinámico y la distribución del mercado entre cuatro productores permiten entender el dominio del enunciado como el resultado de una distribución que verifica el principio de repartición equitativa (lo que matemáticamente se entiende como equiprobables).

Según Lakoff y Núñez (2000, p. 158), entendemos este caso de paseo al azar como resultado de un movimiento sin fin que tiene un principio gracias a que solemos proyectar metafóricamente sobre este tipo de procesos nuestro conocimiento de los procesos cotidianos, que en su mayoría tienen principio y fin. Más aún, los procesos que continúan indefinidamente se conceptualizan metafóricamente como que tienen un final y un último resultado. Para los autores, este tipo de conceptualización es el resultado de la aplicación de lo que ellos llaman la metáfora básica del infinito. En mi caso, y por experiencia empírica, he decidido llamarla metáfora del juicio final.

Presentamos este problema de paseos al azar como mecanismo de aprendizaje y enseñanza en educación secundaria. No tan sólo como forma discreta de analizar un problema de tipo probabilístico (azaroso a priori), sino como herramienta matemática para verificar conjeturas que suelen ser advertidas en este tipo de contenidos en la enseñanza tradicional, ahora mediante el uso de metáforas.

Actividades cognitivas en el aprendizaje

Duval (1996) distingue dos características propias de la actividad cognitiva involucradas en el aprendizaje de las matemáticas. Por un lado, varios registros son comúnmente observados en el juego matemático y dichos objetos (matemáticos) no pueden ser aprendidos de manera perceptiva; surgen entonces las interrogantes: ¿Cómo es posible aprender a pasar de un registro a otro? ¿Cómo enseñamos a no confundir un objeto matemático con su representación?

El origen de varias dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se vincula a estas dos preguntas. Los problemas de probabilidad son ambiguos en cuanto a la clase de validación buscada por el profesor (por ejemplo, ¿puedo usar calculadora para justificar mi conclusión?). El tipo de problema y el tipo de validación son, ambos, parte de la responsabilidad del maestro, con el fin de hacer explícito el contrato didáctico (Brousseau, 1998).

Con base en mi experiencia personal al tratar esta problemática en cursos de álgebra y estadística con futuros profesores y estudiantes de matemáticas, el cuadro 1 suele representar una dificultad para que el alumno pueda dar una respuesta correcta, ya que la probabilidad de que la hormiga esté en el vértice A no es igual a la de encontrarse en los demás vértices, esto no sólo en las primeras caminatas, sino en todas. En este caso, el cuadro podría no ser una herramienta eficaz para probar que la probabilidad del vértice A es igual a la de B, C y D.

En este sentido, y desde la noción de representación semiótica propuesta por

Duval (1995), los estudiantes a menudo se adhieren a un tipo de representación (en su mayoría "concreta") y no se mueven a otra, aun cuando el profesor les muestra que otro tipo de representación es más adecuada o eficaz. Esta falta de flexibilidad en el movimiento de un tipo de representación a otro se puede interpretar como la concepción que tienen los estudiantes de las diferentes representaciones; en suma, para un mismo concepto matemático, sus representaciones son totalmente distintas y autónomas (Anastasiadou y Gagatsis, 2007).

ALGUNAS CONCLUSIONES

El análisis de este problema metafórico-matemático ha mostrado la complejidad que conlleva el estudio de las probabilidades y la riqueza de las variadas representaciones que podemos realizar de la misma problemática. Se propone como ejemplo el concepto de paseos al azar sobre un conjunto finito para mostrar que el profesor tiene varias metáforas entre las que puede elegir, y que una sola podría no ser lo suficientemente robusta como para representar fielmente todas las características de dicho concepto.

El abordaje metafórico de esta problemática permite visualizar que la concepción "natural" de probabilidad es consistente con la idea de la probabilidad que se entiende fuera de las matemáticas, a partir de las ideas e intuiciones básicas del estudiante. Es de relevancia destacar que esta propuesta educativa, destinada a estudiantes de enseñanza secundaria, permite el uso de representaciones, simulaciones y medios didácticos en el aprendizaje del concepto probabilidad, permitiendo el florecimiento de las metáforas y el hacer cuerpo del concepto probabilidad.

En cuanto a los procedimientos de resolución, los problemas comunes que se tratan en el aula son pobres al mostrar un algoritmo único e inclinado hacia el cálculo algebraico. Respecto al enunciado de un problema, se ha pasado en los últimos años del rigor matemático actualmente a la presentación intuitiva, pero sigue siendo un desafío para el profesor bajar de lo abstracto del concepto matemático al mundo cotidiano con el uso de metáforas contextualizadas y sugeridas en la realidad.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acevedo, I. (2005), "Metaphors in mathematics classrooms: Analyzing the dynamic process of teaching and learning to graph function", en *Proc. CERME 4*. Recuperado de http://ermeweb.free.fr/CERME4/

Anastasiadou, S. y A. Gagatsis (2007), "Exploring the effects of representations on the learning of statistics in Greek primary school", en *Proc. CERME 5*. Recuperado de http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/CERME5b/.

Araya, R. (2000), *La inteligencia matemática*, Santiago de Chile, Editorial Universitaria.

Batanero, C. (2000), "Controversies around significance tests", *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 2, núms. 1-2, pp. 75-98.

Bennet, D. J. (1998), *Randomness*, Nueva York, Cambridge University Press.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble, La pensée sauvage.

Cerda-Morales, G. (2012), "studio discreto del movimiento browniano: Memorias de una hormiga caminante", *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* núm. 32, pp. 157-164.

Dubinsky, E. (1999), "Review of *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*", L. D. English (comp.), *Notices of the Amer. Math. Soc.*, vol. 46, núm. 5, pp. 555-559.

Duval, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine*, Berna, Peter Lang.

——— (1996), "Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?", *Recherche en Didactique des* Mathématique, vol. 16, núm. 3, pp. 348-382.

Gal, I. (2005), "Democratic access to probability: Issues of probability literacy", en G. A. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Nueva York, Springer, pp. 39-63.

Gardner, H. (2005), *Las cinco mentes del futuro: un ensayo educativo*, Buenos Aires, Paidós.

Johnson, M. y G. Lakoff (2003), *Metaphors we live by*, Nueva York, The University of Chicago Press.

Lakoff, G. y R. Núñez (2000), *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Nueva York, Basic Books.

Marghetis, T. y R. Núñez (2013), "The motion behind the symbols: A vital role for dynamism in the conceptualization of limits and continuity in expert mathematics", *Topics in Cognitive Science,* vol. 5, núm. 2, pp. 299-316.

Núñez, R. y W. J. Freeman (2000), *Reclaiming cognition: The primacy of action, intention and emotion*, Bowling Green, OH, Imprint Academic.

Núñez, R. (2000), "Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics", en *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, pp. 3-22, Hiroshima, Hiroshima University.

Palmquist, R. (2001), "Cognitive style and users' metaphors for the web: an exploratory study", *The Journal of Academic Librarianship*, vol. 27, núm. 1, pp. 24-32.

Presmeg, N. C. (1997), "Reasoning with Metaphors and Metonymies in Mathematics Learning", en L. D. English (comp.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, Mahwah, NJ, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 267-279.

Sfard, A. (1994), "Reification as the birth of metaphor", *For the Learning of Mathematics,* vol. 14, núm. 1, pp. 44-55.

——— (1997), "Commentary: On metaphorical roots of conceptual growth", en L. D. English (comp.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images*, Londres, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 339-371.

Soto-Andrade, J. (2006), "Un monde dans un grain de sable: Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 123-147.

——— (2007), "La cognición hecha cuerpo florece en metáforas...", en A. Ibañez y D. Cosmelli (eds.), *Nuevos enfoques de la cognición. Redescubriendo la dinámica de la acción, la intención y la intersubjetividad*, Santiago de Chile, Universidad Diego Portales, pp. 71-90.

Tall, D. (2005), "A Theory of Mathematical Growth through Embodiment, Symbolism and Proof", *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, vol. 11, pp. 195-215.

Varela, F. J. (1995), "Resonant cell assemblies: a new approach to cognitive functions and neuronal synchrony", *Biological Research*, vol. 28, núm. 1, pp. 81-95.

Varela, F., E. Thompson y E. Rosch (1998), *The embodied mind: cognitive science and human experience*, Cambridge, MIT Press.

DATOS DEL AUTOR

Gamaliel Cerda-Morales
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
gamaliel.cerda.m@mail.pucv.cl

Árbitros 2015

Nombre	Institución	País
Martín Acosta Gempeler	Universidad Distrital Francisco José Caldas	Colombia
Luis Manuel Aguayo	Universidad Pedagógica Nacional-Plantel Zacatecas	México
María Cecilia Agudelo	Pensionada Universidad del Tolima	Colombia
Minerva Aguirre	Universidad de Nuevo León	México
Silvia Alatorre	Universidad Pedagógica Nacional	México
Alejandra Ávalos	Escuela Normal Superior de México	México
Pilar Azcárate	Universidad de Cádiz	España
Hugo Balbuena	Universidad Pedagógica Nacional	México
Gustavo Barallobres	Universidad de Quebec en Montreal	Canadá
Bertha Barquero	Universidad de Barcelona	España
José Ignacio Barragués	Universidad del País Vasco	España
Ana Laura Barriendos	Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación	México
Roberto Behar	Universidad del Valle	Colombia
Silvia Bernardis	Universidad Nacional del Litoral	Argentina
David Block	Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav)	México
Claudia Broitman	Universidad Nacional de la Plata	Argentina
Gabriela Buendía	Colegio Mexicano de Matemática Educativa	México
Alberto Camacho	Instituto Tecnológico de Chihuahua II/ Universidad Autónoma de Chihuahua	México
Patricia Camarena	Instituto Politécnico Nacional	México
José Carrillo	Universidad de Huelva	España
Leonor Camargo	Universidad Pedagógica Nacional	Colombia
Walter Castro	Universidad de Antioquia	Colombia
Ángel Contreras	Universidad de Jaén	España

Nombre	Institución	País
Luis Carlos Contreras	Universidad de Huelva	España
José Luis Cortina	Universidad Pedagógica Nacional-Plantel Ajusco	México
Bruno D'Amore	Universidad Distrital Francisco José Caldas	Colombia
Enrique de la Torre	Universidad de la Coruña	España
Eugenio Díaz Barriga	Universidad Autónoma del Estado de México	México
Daniel Eudave	Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
Martha Isabel Fandiño	Universidad Distrital Francisco José Caldas	Colombia
Conceição Ferreira Reis Fonseca	Universidad de Minas Gerais	Brasil
Carlos Alberto Figueiredo	Escola Secundária D. Sancho II de Elvas, Elvas	Portugal
Alfinio Flores	Delaware University	Estados Unidos de América
Angel Homero Flores	Universidad Nacional Autónoma de México	México
Teresa González Astudillo	Universidad de Salamanca	España
Edith Gorostegui	Universidad Nacional del Nordeste	Argentina
Santiago Inzunza	Universidad Autónoma de Sinaloa	México
Carlos Mario Jaramillo	Universidad de Antioquia	Colombia
Ana Elisa Lage	Instituto Tecnológico Autónomo de México	México
Víctor Larios	Universidad Autónoma de Querétaro	México
Javier Lezama	Instituto Politécnico Nacional	México
Salvador Llinares	Universidad de Alicante	España
Miguel Ángel Márquez	Universidad Autónoma de Aguascalientes	México
Gustavo Marmolejo	Universidad Francisco José Caldas	Colombia
Ana Maroto	Universidad de Valladolid	España

Nombre	Institución	País
Rafael Martínez Planell	Universidad de Puerto Rico-Campus Mayagüez	Puerto Rico
Luis Moreno	Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav)	México
Mar Moreno	Universidad de Alicante	España
Cristina Ochoviet	Instituto de Profesores Artigas	Uruguay
Asuman Oktaç	Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav)	México
Tomás Ortega	Universidad de Valladolid	España
Marcela Parraguez	Pontificia Universidad Católica de Chile	Chile
María del Carmen Penalva	Universidad de Alicante	España
Jesús Pinto-Sosa	Universidad Autónoma de Yucatán	México
Paulino Preciado	Universidad de Calgary	Canadá
Ángela Restrepo	Universidad de los Andes	Colombia
Mirela Rigo	Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav)	México
Solange Roa	Universidad Industrial de Santander	Colombia
Héctor Rosario	Universidad de Puerto Rico-Campus Mayagüez	Puerto Rico
Norma Rubio Goycochea	Universidad Católica del Perú	Perú
Irma Sáiz	Universidad Nacional del Nordeste	Argentina
Carmen Samper de Caicedo	Universidad Pedagógica Nacional	Colombia
Andrés Sánchez-Moguel	Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación	México
Gloria Sánchez-Matamoros	Universidad de Sevilla	España
Ernesto Sánchez	Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav)	México
Mario Sánchez	Instituto Politécnico Nacional	México

Nombre	Institución	País
Ivonne Sandoval	Universidad Pedagógica Nacional-Plantel Ajusco	México
Armando Sepúlveda	Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo	México
Natalia Sgreccia	Universidad Nacional de Rosario	Argentina
Jeanette Vargas	Universidad Colegio Mayor del Rosario	Bogotá
Gonzalo Zubieta	Centro de Investigación y Estudios Avanzados (Cinvestav)	México

Política editorial

La revista Educación Matemática es una publicación internacional arbitrada que ofrece un foro académico para la presentación y discusión de ideas, conceptos, propuestas y modelos que puedan contribuir a la comprensión y la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diversos contextos y latitudes. La revista aparece tres veces al año y publica artículos de investigación y ensayos teóricos sobre temas relacionados con la educación matemática. Adicionalmente, difunde reseñas y contribuciones para la docencia en matemáticas.

OBJETIVOS

Educación Matemática se propone:

- Actuar como un foro académico internacional en lengua española en el que se discutan problemáticas y hallazgos en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en diferentes contextos.
- Facilitar la comunicación entre investigadores, estudiantes de posgrado y maestros de matemáticas.
- Promover la investigación en educación matemática en los países iberoamericanos.
- Colaborar en la comprensión de la naturaleza, la teoría y la práctica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

LECTORES

Educación Matemática está dirigida a investigadores de la educación matemática, maestros en formación y en ejercicio, estudiantes de posgrado, diseñadores de programas y proyectos educativos, evaluadores, administradores y cuadros técnicos vinculados con la educación matemática.

PRINCIPALES TEMÁTICAS

El contenido de Educación Matemática se orienta principalmente a los siguientes temas:

- Educación matemática en el nivel básico.
- Educación matemática en el nivel preuniversitario.
- Educación matemática en el nivel universitario.
- Los sistemas educativos y las políticas educativas en educación matemática.
- Saberes matemáticos y procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas en contextos no escolares.
- Historia y epistemología de las matemáticas y de la educación matemática.

INFORMACIÓN PARA LOS AUTORES

- La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica artículos de investigación y otras contribuciones (ensayos, reseñas y contribuciones para la docencia) en español, en las temáticas enlistadas en esta Política Editorial.
- Todos los escritos que se reciben se someten a un proceso de evaluación doble-ciego.
- El Comité Editorial, con base en los resultados de la evaluación de los escritos, se reserva el derecho de aceptar o rechazar un material o hacer sugerencias de corrección para su publicación.
- El Comité Editorial y la Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática tendrán los derechos de publicación de los artículos aceptados, para lo cual el autor debe firmar una licencia de publicación no exclusiva que se hará llegar a los autores una vez aprobada la publicación.

PREPARACIÓN DE LOS ESCRITOS

La revista EDUCACIÓN MATEMÁTICA publica los artículos en español y, eventualmente, artículos de investigación en portugués.

ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN:

- Deberán tener originalidad y rigor, y mostrar, explícitamente, el aparato conceptual y metodológico utilizado.
- Prepararse electrónicamente, en *Word* o en algún otro procesador compatible.

- Deberá tener un máximo de 10 000 palabras, incluidas notas, referencias bibliográficas, tablas, gráficas y figuras. Se recomienda ampliamente que en total la extensión del artículo no sea mayor a 30 cuartillas.
- Deberá incluir, también, un resumen de entre 150 y 180 palabras en el idioma en que se haya escrito el artículo (español o portugués). Además, se incluirá una versión en inglés o francés del resumen, y cinco palabras clave en los dos idiomas elegidos.
- En archivo aparte, deberá prepararse una carátula que contenga: *a)* título del artículo; *b)* declaración de que el material es original e inédito y que no se encuentra en proceso de revisión para otra publicación (debe mencionarse, explícitamente, si el material ha sido presentado previamente en congresos y ha aparecido de manera sintética [máximo seis cuartillas] en las memorias del mismo), y *c)* el nombre, institución de adscripción, dirección electrónica, teléfono, domicilio completo (incluyendo código postal) del autor o los autores.
- Las figuras, tablas e ilustraciones contenidas en el texto deberán ir incluidas en el archivo del escrito. En caso de que el artículo sea aprobado, se enviarán en blanco y negro las fotografías o ilustraciones en formatos .jpg, .tif o .eps, insertos en el documento y también en archivo aparte, con una resolución mínima de 300 dpi.
- Deberá evitarse el uso de siglas, acrónimos o referencias locales que no sean conocidas por un lector internacional; si éstas se utilizan, deberá explicitarse su significado a pie de página, la primera vez que aparezcan.
- Las referencias dentro del texto deben señalarse indicando, entre paréntesis, el autor, año de la publicación y página o páginas (Freudenthal, 1991, p. 51).
- Al final del artículo se debe incluir la ficha bibliográfica completa de todas las referencias citadas en el texto de acuerdo con el siguiente modelo.

Briand, J. (2011), "El lugar de la experiencia en la construcción de las matemáticas en clase", *Educación Matemática*, vol. 23, núm. 1, pp. 5-36.

Fuenlabrada, I. (compiladora) (2008), *Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg*, México, DIE-CINVESTAV/COMIE/UPN.

Stigler, J. W. y J. Hiebert (1999), *The Teaching Gap. Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*, Nueva York, Free Press.

Moreno, L y J. Kaput (2005), "Aspectos semióticos de la evolución histórica de la aritmética y el álgebra", en M. Alvarado y B. Brizuela (compiladoras),

Haciendo números. Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia, México, Paidós (Col. Educador 179).
Hernández, S. y H. Jacobo (2011), "Descripción de algunas tesis de maestría en educación matemática", *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* vol. 13, núm. 1. Consultado el 28 de marzo de 2012 en: http://redie.uabc.mx/vol11no1/contenido-hdezjacobo.html

ENSAYOS

Educación matemática publica ensayos de alta calidad con un máximo de 6 000 palabras (y 12 cuartillas incluyendo imágenes y bibliografía), que aborden de manera rigurosa y original algún tema relevante en el campo de la educación matemática. A diferencia de los artículos, los ensayos implican la interpretación de un tema desde el punto de vista del autor, sin que sea necesario explicitar el aparato metodológico o documental específico que lo sustenta, ni aportar datos empíricos. Los ensayos se someten al mismo proceso de arbitraje que los artículos de investigación.

CONTRIBUCIONES PARA LA DOCENCIA

Educación matemática considera para su publicación un número limitado de contribuciones para la docencia, consistentes en propuestas originales de presentación de un tema, acercamientos novedosos que hayan sido probados en clase, lecciones, prácticas, ejercicios, puntos de vista sobre algún material educativo y, en general, cualquier producto de la experiencia en el aula o de planeación de proyectos en educación matemática que se considere valioso compartir con los docentes de los distintos niveles educativos. Las contribuciones para la docencia no deberán exceder 4 000 palabras o 10 cuartillas incluyendo tablas, gráficas y figuras, y deberán enviarse en formato Word, con los mismos lineamientos que para la presentación de artículos.

RESEÑAS

Educación Matemática publica también reseñas de libros especializados, libros de texto, *software*, tesis de doctorado y eventos relevantes relacionados con las temáticas de la revista y que hayan aparecido recientemente. Las reseñas deben expresar el punto de vista de su autor; es decir, que no serán meramente descriptivas, y no excederán 2 000 palabras. Asimismo, deben incluir la ficha completa del texto o *software* reseñado; el nombre, institución de adscripción y el correo electrónico del autor. En el caso de las reseñas de tesis de doctorado, se incluirá también el grado, institución, director de tesis y fecha de defensa.

PROCESO DE ARBITRAJE

Aspectos generales

Todos los manuscritos recibidos están sujetos al siguiente proceso de arbitraje.

El Comité Editorial hace una primera revisión del manuscrito para verificar si cumple los requisitos básicos para publicarse en Educación Matemática. Esta revisión interna se realiza en un plazo aproximado de un mes. En este término, se notificará por correo electrónico al autor si su manuscrito será enviado a evaluadores externos. En el caso en el que el manuscrito no se considere adecuado para su eventual publicación en Educación Matemática, se expondrán, por escrito, las razones al autor.

Artículos y ensayos

Las contribuciones que cumplan los requisitos básicos para ser evaluados serán enviadas para arbitraje doble-ciego de al menos dos expertos en el tema. Este proceso de arbitraje se realizará en un plazo máximo de tres meses. Después de este periodo, el autor recibirá los comentarios de los revisores y se le notificará la decisión del Comité Editorial: Aceptado en su versión original, Aceptado con modificaciones menores, Aceptación condicionada a incorporación de modificaciones mayores, o Rechazado.

El autor deberá responder electrónicamente si está de acuerdo o no en elaborar una segunda versión de su contribución, incorporando los cambios propuestos. La versión revisada, que incluya una relación de los cambios efectuados, deberá enviarse en un periodo no mayor de tres meses. Si el autor o autores envían su segunda versión en un plazo mayor al estipulado, el escrito será considerado como Nueva contribución, y se reiniciará el proceso de arbitraje.

En e l caso en que un árbitro apruebe una contribución con modificaciones menores y otro la rechace, la contribución se enviará a un tercer revisor. Prevalecerá la opinión de dos, de los tres árbitros.

Contribuciones para la docencia

Las contribuciones para la docencia se someten a un proceso de arbitraje en el que participan como árbitros un miembro del Comité Editorial y un árbitro externo. Los plazos del proceso son los mismos que para los artículos y los ensayos. En caso de discordancia en las evaluaciones, se seguirá un proceso similar al de artículos y ensayos.

Reseñas

Las reseñas son evaluadas por un miembro del Comité Editorial y el resultado de su evaluación se comunica al autor una vez que haya sido discutido en el pleno del Comité Editorial. Para hacer la evaluación, en este caso, se consideran la actualidad y relevancia del objeto de la reseña y la calidad de la perspectiva personal que el autor incorpora en su escrito.

ENVÍO DE LOS ESCRITOS

Los escritos deberán enviarse en archivo electrónico a la siguiente dirección electrónica: revedumat@yahoo.com.mx.

Precio del ejemplar en papel	Institucional	Personal
	$300.00 más gastos de envío	$150.00 más gastos de envío

Educación Matemática

se terminó de editar electrónicamente
en Ediciones y Traducciones,
en el mes de enero de 2016.

Colaboradores internacionales

- *Michele Artigue*, Université Paris 7, IUFM de Reims y equipo DIDIREM, Francia
- *Carmen Azcárate*, Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, España
- *Luis Balbuena*, Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, España
- *Sergio Ballerteros Pedrozo*, Universidad Pedagógica Enrique José Varona, Cuba
- *Edgar José Becerra Bertram*, CENEVAL, México
- *Carlos Bosch*, Instituto Tecnológico Autónomo de México, Departamento de Matemáticas, México
- *Alberto Camacho Ríos*, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
- *José Contreras Francia*, University of Southern Mississipi, Estados Unidos
- *César Cristóbal Escalante*, Universidad de Quintana Roo, México
- *Miguel de Guzmán*, Universidad Complutense de Madrid, España
- *José Ángel Dorta Díaz*, Universidad de La Laguna, Departamento Análisis Matemático, España
- *Daniel Eudave Muñoz*, Universidad Autónoma de Aguascalientes, Departamento de Educación, México
- *Eugenio Filloy Yagüe*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Alfinio Flores Peñafiel*, Arizona State University, Estados Unidos
- *Grecia Gálvez*, Ministerio de Educación de Chile, Chile
- *Jesús Roberto García Pérez*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Departamento de Matemática Educativa, México
- *Fredy González*, Instituto Pedagógico de Maracay, Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Venezuela
- *Ángel Gutiérrez*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia, España
- *Nelson Hein*, Universidade Regional de Blumenau, Brasil
- *José Ramón Jiménez*, Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas, México
- *Moisés Ledesma Ruiz*, Escuela Normal Superior de Jalisco, México
- *Antonio Jose Lopes*, Centro de Educaço Matematica, Brasil
- *Eduardo Luna*, Barry University, Department of Mathematics and Computer Science, School of Arts and Sciences, Estados Unidos
- *Bertha Alicia Madrid Núñez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Armando Martínez Cruz*, Californa State University Fullerton, Estados Unidos
- *Jorge Martínez Sánchez*, Universidad Iberoamericana, México
- *Leonel Morales Aldana*, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala
- *Luis Enrique Moreno Armella*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *María del Rocío Nava Álvarez*, Instituto de Educación del Estado de México, México
- *Josefina Ontiveros Quiroz*, Universidad Autónoma de Querétaro, Centro de Investigación en Ciencias Físico Matemáticas, México
- *Fidel Oteiza*, Universidad de Santiago de Chile, Departamento de Matemática y Ciencias de la Computación, Chile
- *François Pluvinage*, Universidad de Estrasburgo, Francia
- *Ángel Ruiz*, Universidad de Costa Rica, Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, Costa Rica
- *Luisa Ruiz Higueras*, Universidad de Jaén, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Fac. de Ciencias de la Educación, España
- *María Teresa Rojano Ceballos*, Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México
- *Jorge Sagula*, Universidad Nacional de Luján, Departamento de Ciencias Básicas, División Matemática, Argentina
- *Patrick Scott*, University of New Mexico, Estados Unidos
- *Isabel Soto*, Centro de Investigación y Desarrollo de la Educación, Chile
- *Guadalupe T. de Castillo*, Universidad de Panamá, República de Panamá
- *Santiago Valiente Barderas*, Escuela Normal Superior de México, México

www.revista-educacion-matematica.com